

ÜBER DIE METHODEN

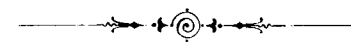
ZUR

BEOBSACHTUNG VON NEIGUNGSWELLEN.

VON

Fürst B. Galitzin.

*N 2354.*



ST. PETERSBURG.

BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

• Wass. Ostr., 9. Linie № 12.

1905.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.  
St. Petersburg, Juni 1905. S. v. OLDENBURG, Beständiger Sekretär.

# Ueber die Methoden zur Beobachtung von Neigungswellen.

VON FÜRST B. GALITZIN.

---

## § 1.

### Einleitung.

Eine der schwierigsten Aufgaben der modernen Seismometrie besteht darin, die während einer Erderschütterung am Beobachtungsorte stattfindenden Verschiebungen der Erdoberfläche von den eigentlichen Neigungen derselben wirklich zu trennen. Diese Neigungen mögen eventuell äusserst klein sein, aber ein wirklicher Beweis, dass sie überhaupt nicht existieren, ist bis jetzt von Niemandem geliefert worden. Ist ein Erdbeben an einem gegebenen Ort durch eine fortschreitende Erdbebenwelle verursacht, so müssen wirkliche Neigungen der Erdoberfläche während eines Erdbebens unbedingt zu Stande kommen, mögen sie auch noch so klein sein. Die grosse theoretische Schwierigkeit besteht nur darin, solche seismometrische Instrumente zu ersinnen und in Anwendung zu bringen, welche diese Neigungen direct zu registrieren ermöglichen, ohne von den eigentlichen Verschiebungen der Erdoberfläche beeinflusst zu werden.

Zu diesem Zweck hat der leider für die seismometrische Wissenschaft zu früh verstorbene Schlüter seinen Klinographen vorgeschlagen. Gegen dieses Instrument in der Form, wie es von Schlüter beschrieben war, habe ich in meinem Aufsatz «Ueber seismometrische Beobachtungen»<sup>1)</sup> gewisse Einwände erhoben. Der Grundgedanke Schlüter's ist jedoch ein ganz richtiger, und ich glaube, dass der Klinograph nur einer gewissen Umänderung bedarf, um in ein für seismometrische Zwecke sehr werthvolles Instrument verwandelt zu werden. Auf diese Frage werde ich aber erst in einem späteren Paragraphen zurückkommen.

---

<sup>1)</sup> Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. Livraison 1 § 3, p. 109. (1902).

Die auf seismometrischen Stationen am meisten verwendeten Instrumente, nämlich die Horizontal- resp. Verticalpendel eignen sich für den eben erwähnten Zweck, wenigstens in ihrer jetzt gebräuchlichen Form, überhaupt nicht, da sie sowohl von den Verschiebungen, als auch zu gleicher Zeit von den Neigungen der Erdoberfläche beeinflusst werden, und es ist überhaupt keine Möglichkeit vorhanden, nach den Aufzeichnungen eines solchen Apparates die wirklichen Verschiebungen von den Neigungen zu trennen.

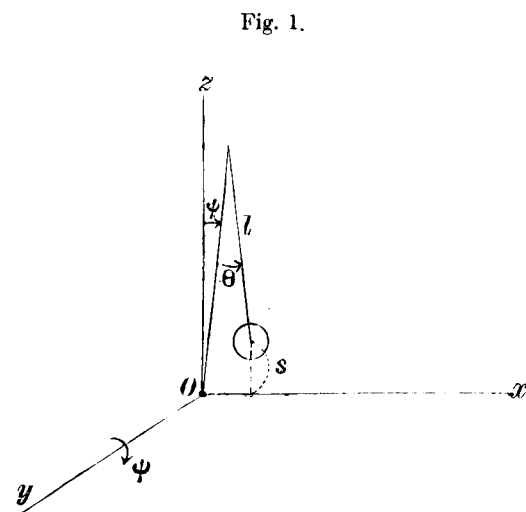
Nehmen wir nun an, dass ein Vertical-<sup>1)</sup> resp. Horizontalpendel so aufgestellt ist, dass es der Wirkung der Verschiebungen ( $x$ ) längs der  $x$ -Axe, wie auch der Neigungen ( $\psi$ ) um die  $y$ -Axe unterworfen ist, so lassen sich bekanntlich die Differentialgleichungen der Bewegung dieser Apparate in folgender vereinfachter Form schreiben:<sup>2)</sup>

$$\theta'' + \frac{g}{l} \theta + \frac{1}{l} (x'' - g\psi) + \frac{s}{l} \psi'' = 0 \dots (1) \quad \text{Verticalpendel.}^3)$$

$$\theta'' + \frac{g}{l} i_0 \theta + \frac{1}{l} (x'' - g\psi) + \frac{s}{l} \psi'' = 0 \dots (2) \quad \text{Horizontalpendel.}$$

Hierin bedeuten:

- $\theta$  — die beobachtete relative Winkelablenkung des Apparates von seiner Ruhelage, nämlich diejenige Grösse, welche direct gemessen wird;
- $g$  — die Beschleunigung der Schwere;
- $l$  — die «reducirte» Länge des Pendels;
- $i_0$  — die Neigung der Drehungsaxe des Horizontalpendels gegen die Verticale, und
- $s$  — die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes des Pendels von der  $xy$ -Ebene.



Diese beiden Formeln lehren uns ganz deutlich, dass principiell kein Unterschied zwischen einem Vertical- und einem Horizontalpendel besteht,

<sup>1)</sup> Mit bifilarer Aufhängung; siehe meinen Aufsatz «Ueber seismometrische Beobachtungen». L. c. p. 144.

<sup>2)</sup> In diesen Formeln sind nur die Hauptglieder, welche die Bewegung der Apparate beherrschen, beibehalten worden. Von der Dämpfung ist ebenfalls vollständig abgesehen worden.

<sup>3)</sup> Man vergleiche die Formel (233).

nur ist ein Horizontalpendel, wegen des Vorhandenseins des Factors  $i_0$  in dem Hauptgliede mit  $\theta$ , ein viel empfindlicherer Apparat, als das Verticalpendel.

Die Hauptsache aber ist die, dass das Glied, welches von den Verschiebungen der Erdoberfläche unmittelbar abhängt, immer in der Verbindung  $x'' - g\psi$  auftritt. Wenn diese Verschiebungen und Neigungen als völlig unbekannte Grössen auftreten, ist es folglich ganz und gar unmöglich, aus den Aufzeichnungen eines solchen Apparates diese Verschiebungen und Neigungen getrennt zu bekommen. Die Beobachtungen mit solchen Instrumenten, wenn dieselben in der üblichen Weise auch in zwei zu einander senkrecht stehenden Azimuten aufgestellt sind, werden nie im Stande sein, uns über die wahre Bewegung der Erdoberfläche während eines Erdbebens aufzuklären.

Wie compliciert die Bewegung eines Horizontalpendels ausfallen kann, wenn es zu gleicher Zeit der Wirkung von Verschiebungen und Neigungen ausgesetzt ist, falls dieselben auch nur einfache Sinusbewegungen darstellen, werden die im nächsten Paragraphen mitgetheilten mit meiner früher beschriebenen Untersuchungsplattform<sup>1)</sup> ausgeführten Beobachtungen ganz deutlich zeigen.

Eine nähere Betrachtung der beiden früher aufgestellten Formeln lässt jedoch die Möglichkeit erkennen, dass man mit Hilfe von zwei, resp. vier, wenn man auch das entsprechende Azimut feststellen will, Vertical- oder Horizontalpendeln die Verschiebungen von den Neigungen zu trennen im Stande wäre. Zu diesem Zweck müsste man, zum Beispiel, zwei Verticalpendel in verschiedenen Höhen aufstellen und, da für jedes derselben  $s$  einen verschiedenen Werth erhält, so ist in Wirklichkeit die theoretische Möglichkeit vorhanden, aus den Aufzeichnungen beider Instrumente  $x$  und  $\psi$  getrennt zu bekommen. Das wäre jedoch ein sehr complicierter Weg, welcher kaum zu empfehlen ist. Es lässt sich aber auf diesem Princip ein besonderer Apparat, eine Art Doppelpendel construiren, welcher im Stande ist, die Neigungen der Erdoberfläche in sehr einfacher Weise wiederzugeben, ganz abgesehen von dem Vorhandensein irgend welcher Verschiebungen. Auf diese Frage werde ich ebenfalls erst in einem späteren Paragraphen zurückkommen.

In meinem ersten Aufsatz «Ueber seismometrische Beobachtungen»<sup>2)</sup> habe ich zur Untersuchung von Neigungen einen Davison'schen Apparat

<sup>1)</sup> Siehe «Ueber seismometrische Beobachtungen» l. c. § 10, p. 162 und «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. I. Livraison 3. § 9. p. 49 (1904).

<sup>2)</sup> L. c. § 8 p. 155.

vorgeschlagen, wobei ich, um die schwingenden Bewegungen des Apparates möglichst zu beseitigen, von unten an dem Gewicht einen Stift anzubringen für nützlich hielt, welcher in eine kleine Höhlung hineinragte.

Ein Davison'scher Apparat bietet den grossen Vortheil, dass man durch Vergrösserung des Unterschiedes in der Länge beider Drähte oder durch Verkleinerung der Entfernung zwischen denselben die Empfindlichkeit des Apparates fast im beliebigen Maasse zu steigern im Stande ist, und es schien mir alsdann, als ob der Apparat von Davison, wegen seiner hohen Empfindlichkeit, als ein sehr werthvolles Instrument zur Untersuchung von Neigungen zu empfehlen wäre. Ich habe jedoch dabei ausdrücklich betont<sup>1)</sup>, dass man, bevor man zur Gründung einer seismometrischen Station nach dem von mir damals vorgeschlagenen Plan herantritt, die verschiedenen angegebenen Formeln zuerst einer sorgfältigen experimentellen Prüfung unterziehen soll. In Bezug auf den Davison'schen Apparat erwies sich dies als höchst berechtigt, da derselbe, obgleich er eine sehr grosse Empfindlichkeit besitzt und für statische Vorgänge, wenn es sich nur darum handelt, die resultierende, fest bleibende Neigung der Erdoberfläche zu ermitteln, sich als ein höchst zweckmässiges und elegantes Instrument bewährt hat, bei dynamischen Vorgängen dagegen, wenn er fortwährend dem Einflusse von Neigungswellen ausgesetzt ist, alle seine Vortheile verliert und sich, wenigstens in der ihm von Davison gegebenen Form, als ganz und gar unbrauchbar erweist. Es lässt sich jedoch an diesem Apparat eine gewisse Abänderung treffen, welche ihn wieder in ein zur Untersuchung von Neigungen ganz brauchbares Instrument zu verwandeln im Stande ist. Auf diese Frage werde ich ebenfalls später zurückkommen, wenn ich die vollständige Theorie dieses Instruments, welche in meinem ersten Aufsatz nur skizziert wurde, angeben werde.

Dementsprechend zerfällt diese meine Abhandlung in folgende Haupttheile. Erstens werde ich die verschiedenen von mir unter Mitwirkung meines Assistenten Herrn Wilip, welcher mir bei dieser ganzen Arbeit sehr behülflich war, auf meiner Plattform ausgeführten Untersuchungen über den Einfluss von Verschiebungen und Neigungen auf ein Horizontalpendel angeben. Dann werde ich versuchen, eine vollständige Theorie des Davison'schen Apparates darzulegen und zwar zuerst eines von unten gestützten, wie dieses von mir zuerst vorgeschlagen war, und alsdann eines ganz freien.

Zum Schluss werde ich drei Typen von Apparaten besprechen, welche meiner Ansicht nach zur Erforschung reiner Neigungen wirklich tauglich sind, ganz unabhängig von irgend welchen Verschiebungen.

<sup>1)</sup> L. c. p. 162.

## § 2.

### Ueber die Bewegung eines Horizontalpendels unter dem Einfluss von Verschiebungen und Neigungen.

Das von mir zu diesen Versuchen benutzte Horizontalpendel, welches nach dem Typus der von Bosch in Strassburg angefertigten Instrumente construirt ist, war dasselbe, welches ich bei meinen früheren Versuchen<sup>1)</sup> verwendet habe.

Dieses Pendel wurde auf meiner früher beschriebenen Plattform aufgestellt; auf derselben befand sich ebenfalls der Registrierapparat mit der drehbaren Trommel. Ein fest mit dem Boden des Zimmers verbundener Stift diente zur Registrierung der horizontalen Verschiebungen der Plattform auf der drehbaren Trommel. Diese ganze Einrichtung war vollständig identisch mit derjenigen, welche ich in den §§ 10 und 14 meines eben erwähnten Aufsatzes ausführlich beschrieben habe, wobei die dort angegebenen Anmerkungen auch bei diesen Untersuchungen ihre Gültigkeit behalten.

Bei meinen früheren Versuchen habe ich die Bewegung eines periodischen und eines aperiodischen Horizontalpendels nur unter dem Einflusse von Längsverschiebungen der Plattform untersucht.

Jetzt habe ich die Plattform, mit Hilfe der zweiten excentrischen Rolle<sup>2)</sup>, auch periodischen Neigungen ausgesetzt. Ich konnte also entweder periodische Verschiebungen, oder periodische Neigungen, oder auch beide zugleich auf das Horizontalpendel wirken lassen, wobei die Perioden beider Bewegungen mit Hilfe von Transmissionsrollen verschiedener Durchmesser und durch Ein- oder Ausschaltung von Widerständen im Rheostaten beim Electromotor in ziemlich weiten Grenzen geändert werden konnten.

Zum Zweck der Registrierung der Neigungen der Plattform wurde in der unmittelbaren Nähe der Drehungsaxe derselben an dem beweglichen Rahmen *b* (siehe die Fig. XV l. c. p. 163) eine Metallstange befestigt, welche oben einen Stift zum Aufzeichnen einer Curve auf dem geschwärzten Papier der drehbaren Trommel hatte. Ist die Entfernung dieses Stiftes von der Drehungsaxe der Plattform gleich  $s_1$  und ist die Plattform nur reinen periodischen Neigungen allein ausgesetzt, so zeichnet dieser Stift bei der Bewegung der Plattform eine einfache Sinuscurve mit der Amplitude in jedem Moment gleich  $s_1\psi$  auf, wobei  $\psi$  die entsprechende Neigung der Plattform bedeutet.

<sup>1)</sup> Siehe meinen zweiten Aufsatz «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen». L. c. p. 50.

<sup>2)</sup> Siehe meinen Aufsatz «Ueber seismometrische Beobachtungen». L. c. § 10. p. 162.

Aus einer solchen Curve lässt sich die Periode der Neigungen leicht ermitteln.

Der fest mit dem Boden des Zimmers verbundene Stift zeichnet auf der drehbaren Trommel bei Verschiebungen allein ebenfalls eine einfache Sinuscurve auf, ist aber die Plattform Verschiebungen und Neigungen zugleich ausgesetzt, so wird die entsprechende Sinuscurve etwas verzerrt, wie es auf einigen weiter mitzutheilenden Curven ersichtlich ist. Diese Verzerrung wird durch den Umstand bedingt, dass der obere Theil der Trommel, auf der die registrierenden Stifte draufliegen, nicht mit der Drehungsaxe der Plattform zusammenfällt, sondern von derselben um  $s_1$  entfernt ist. Diese Verzerrung hindert jedoch nicht bei einiger Uebung die Periode der Verschiebungen mit hinlänglicher Genauigkeit zu ermitteln. Ausser dem registrierenden Stifte des Horizontalpendels und den beiden anderen erwähnten Stiften zur Registrierung der Neigungen und Verschiebungen der Plattform wurde noch ein vierter mit dem Registrierapparat verbundener Stift benutzt, welcher die Nulllinie angab und jede Secunde von einem kleinen Electromagnet angezogen wurde, wodurch die Zeit direct auf der Trommel markiert wurde.

Diese vier Stifte wurden auf der Trommel in eine Linie gebracht und so nah wie möglich aneinander gesetzt. Will man die erhaltenen Curven einer genauen Auswerthung unterziehen, so muss man zur Ermittlung der Phasenverschiebungen etc. genau die Entfernung der Stifte kennen, was auch sehr leicht zu bestimmen ist.<sup>1)</sup> Bei diesen meinen Versuchen kam es aber gar nicht darauf an, die erhaltenen Curven genau zu verwerthen; man wollte nur den Charakter der Bewegung des Horizontalpendels unter dem Einfluss von periodischen Verschiebungen und Neigungen bei verschiedenen Perioden versinnlichen.

Für diesen Zweck wäre es auch gar nicht nöthig die registrierenden Stifte für die Verschiebungen und Neigungen der Plattform zu benutzen, da die Perioden beider Bewegungen direct mit Hilfe eines Secundenzählers hätten bestimmt werden können. Bei einigen Versuchen sind in der That die Perioden der Verschiebungen der Plattform direct in dieser Weise ermittelt worden.

Alle weiter mitzutheilenden Versuche sind unter denselben Bedingungen mit einem einfachen periodischen, so wie auch mit einem aperiodisch gemachten Horizontalpendel ausgeführt worden.

<sup>1)</sup> Dazu braucht man nur bei ruhendem Pendel und Plattform der Trommel eine kleine Verschiebung der Axe entlang mitzutheilen. Dann wird die Entfernung der Stifte direct auf der Trommel angegeben.

Ehe wir zur Betrachtung der Resultate dieser Versuche übergehen, wollen wir zunächst die Theorie der Bewegung eines Horizontalpendels unter dem Einflusse von periodischen Verschiebungen und Neigungen etwas näher erörtern.

Setzen wir eine dämpfende Wirkung auf das Pendel voraus, so lässt sich die Differentialgleichung (2) der Bewegung desselben in folgender verallgemeinerter Form schreiben:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' + \frac{s}{l}\psi'' - \frac{g}{l}\psi = 0. \dots\dots\dots(3)$$

Hierin bedeutet  $\varepsilon$  die Dämpfungsconstante; was nun aber  $n^2$  betrifft, so wird dasselbe bekanntlich durch die folgende Beziehung mit der Neigung  $i_0$  der Drehungsaxe des Pendels gegen die Verticale verbunden

$$n^2 = \frac{g i_0}{l}. \dots\dots\dots(4)$$

Setzen wir

$$T_0 = \frac{2\pi}{n}, \dots\dots\dots(5)$$

so stellt (5) die Periode der Eigenbewegung des vollständig ungedämpften Pendels dar.

Die Verschiebungen und Neigungen der Plattform entsprachen beide einem periodischen Gesetz.

Setzen wir also demgemäss

$$x = x_0 \sin(n_1 t + \delta_1) \dots\dots\dots(6)$$

und

$$\psi = \psi_0 \sin(n_2 t + \delta_2). \dots\dots\dots(7)$$

Ist nun noch

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1} \dots\dots\dots(8)$$

und

$$T_2 = \frac{2\pi}{n_2}, \dots\dots\dots(9)$$

so bedeutet  $T_1$  die Periode der Verschiebungen und  $T_2$  die der Neigungen. Beide Grössen konnten beliebig geändert werden.

$\delta_1$  und  $\delta_2$  sind die anfänglichen Phasen beider Bewegungen; diese Phasen setze ich, der Allgemeinheit halber, als ganz willkürlich voraus.

$x_0$  und  $\psi_0$  sind die maximalen Amplituden beider periodischen Bewegungen. Bei meiner Plattform ist

$$x_0 = 6,4 \text{ mm}$$

und

$$\psi_0 = 0^\circ 17' 57'',$$

also im absoluten Maass

$$\psi_0 = 0,005221.$$

Bestimmen wir nun aus den Gleichungen (6) und (7) die Werthe der zweiten Derivierten und setzen sie in die Differentialgleichung (3) ein, so folgt

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = \beta_1 \sin(n_1 t + \delta_1) + \beta_2 \sin(n_2 t + \delta_2), \dots (10)$$

wo

$$\beta_1 = \frac{n_1^2 x_0}{l} \dots (11)$$

und

$$\beta_2 = \{s n_2^2 + g\} \frac{\psi_0}{l} \dots (12)$$

wird.

Bei der Integration dieser Gleichung (10) sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Der erste Fall

$$\varepsilon < n$$

entspricht einem gewöhnlichen, periodischen Horizontalpendel mit mehr oder weniger starker Dämpfung.

Der zweite Fall

$$\varepsilon > n$$

entspricht einem aperiodischen Pendel.

Beide Fälle wollen wir besonders untersuchen.

**I. Fall.**

$$\varepsilon < n.$$

Die Differentialgleichung (10) lässt sich in einfacher Weise nach den bekannten Methoden der Integralrechnung integrieren, wobei das allgemeine Integral in folgender Form dargestellt werden kann:

$$\theta = e^{-\varepsilon t} \left[ \Gamma_1 \sin \gamma t + \Gamma_2 \cos \gamma t + \frac{\beta_1}{\sqrt{R_1}} \sin(n_1 t + \delta_1 - \Delta_1) + \frac{\beta_2}{\sqrt{R_2}} \sin(n_2 t + \delta_2 - \Delta_2) \right] \dots (13)$$

Hierin bedeuten:

$$\gamma = +\sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \dots (14)$$

$$R_1 = (n^2 - n_1^2)^2 + 4\varepsilon^2 n_1^2 \dots (15)$$

$$R_2 = (n^2 - n_2^2)^2 + 4\varepsilon^2 n_2^2 \dots (16)$$

$$\text{tg } \Delta_1 = \frac{2\varepsilon n_1}{(n^2 - n_1^2)} \dots (17)$$

$$\text{tg } \Delta_2 = \frac{2\varepsilon n_2}{(n^2 - n_2^2)} \dots (18)$$

$\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sind zwei Integrationsconstanten, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung des Pendels unmittelbar abhängen.

Die Gleichung (13) stellt eine Curve dar, welche aus drei Sinuscurven zusammengesetzt ist, deren Perioden respective  $T = \frac{2\pi}{\gamma}$ ,  $T_1$  und  $T_2$  sind. Eine von diesen sinusartigen Bewegungen enthält als Factor die Exponentialgrösse  $e^{-\varepsilon t}$ , folglich werden die Amplituden einer dieser drei Bewegungen mit der Zeit immer kleiner und kleiner.

Je kleiner die Differenz zwischen  $T_0$  und den Perioden  $T_1$  oder  $T_2$ , desto kleiner wird  $R_1$  oder  $R_2$ , also desto grösser der Factor beim entsprechenden Sinusgliede.

Wir sehen also, dass ein einfaches periodisches Horizontalpendel, wenn es zu gleicher Zeit Verschiebungen und Neigungen ausgesetzt ist, eine sehr complicierte, aus drei Bewegungen zusammengesetzte Curve aufschreibt, die unter Umständen bei passender Wahl der Perioden recht verwickelt aussehen kann. Dies haben die weiter mitzutheilenden Versuche auch in der That gezeigt.

Fällt eine der Bewegungen der Plattform, entweder die Verschiebungen oder die Neigungen, vollständig weg, so vereinfacht sich die Bewegung des Horizontalpendels, aber sie besteht immer noch aus zwei sinusartigen Bewegungen.

**II. Fall.**

$$\varepsilon > n.$$

In diesem Fall ist die Dämpfung des Pendels so gross, dass es in ein aperiodisches Instrument verwandelt wird. Dies lässt sich durch eine electromagnetische Dämpfung leicht erreichen, wie ich es in meinem zweiten Auf-

satz «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen»<sup>1)</sup> anderweitig gezeigt habe.

Das allgemeine Integral der Gleichung (10) nimmt jetzt eine andere Form an.

Es wird nämlich

$$0 = \left[ \Gamma_1 e^{-\mu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\mu_2 t} \right] + \frac{\beta_1}{\sqrt{R_1}} \sin(n_1 t + \delta_1 - \Delta_1) + \frac{\beta_2}{\sqrt{R_2}} \sin(n_2 t + \delta_2 - \Delta_2) \quad \dots (19)$$

Hierin bedeuten:

$$\mu_1 = \varepsilon + \alpha \dots (20)$$

$$\mu_2 = \varepsilon - \alpha \dots (21)$$

$$\alpha = +\sqrt{\varepsilon^2 - n^2} \dots (22)$$

$\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sind wiederum zwei Integrationsconstanten.

$R_1$ ,  $R_2$ ,  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  haben dieselbe Bedeutung wie im Falle I; sie werden resp. durch die Gleichungen (15), (16), (17) und (18) bestimmt.

Der in den eckigen Klammern in der Formel (19) stehende Ausdruck verschwindet wegen der starken Dämpfung des Apparates schon bei sehr kleinen Werthen von  $t$ , und es bleiben also nur zwei einfache Sinusbewegungen mit den Perioden  $T_1$  und  $T_2$  übrig.

Wir sehen also, dass ein aperiodisch gemachtes Horizontalpendel, wenn es zugleich Verschiebungen und Neigungen ausgesetzt ist, eine doppelte Sinuscurve aufschreibt. Die Bewegung des Pendels ist viel einfacher, als im periodischen Zustande, aber immer noch kann seine Bewegung unter Umständen recht compliciert ausfallen.

Fällt eine der Bewegungen der Plattform, entweder die Verschiebungen oder die Neigungen, ganz fort, so giebt das aperiodische Horizontalpendel genau den Charakter der Bewegung der Plattform wieder, nur mit einer anderen Amplitude und einer anderen anfänglichen Phase.

Die Werthe der Integrationsconstanten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  in den Formeln (13) und (19) lassen sich aus den Anfangsbedingungen der Bewegung ohne Schwierigkeit bestimmen.

<sup>1)</sup> L. c.

Wollen wir nun einige Specialfälle etwas näher besprechen.

Wir wollen immer voraussetzen, dass am Anfang der Bewegung das Pendel in Ruhe ist.

Dann ist für  $t = 0$

$$\theta = \theta_0 = 0.$$

Was nun die anfängliche relative Winkelgeschwindigkeit des Pendels  $\theta' = (\theta')_0$  anbelangt, so ist es ohne Weiteres ersichtlich, dass dieselbe in folgender Weise sich ausdrücken lässt:

$$(\theta')_0 = -\frac{1}{l} \{ (x')_0 + s(\psi')_0 \}, \dots (23)$$

wo  $(x')_0$  und  $(\psi')_0$  die Geschwindigkeiten beider periodischen Bewegungen der Plattform im Zeitmoment  $t = 0$  bedeuten.

Die Formel (23) kann auch in folgender Weise sehr leicht bewiesen werden.

Dazu braucht man nur die Gleichung (3) Glied für Glied nach  $t$  zu integrieren und zwar zwischen den Grenzen 0 und  $\tau$ , wo  $\tau$  eine äusserst kleine Grösse bedeutet.

Es ergibt sich

$$(\theta')_0 + 2\varepsilon\theta_0 + n^2 \int_0^\tau \theta dt + \frac{1}{l} (x')_0 + \frac{s}{l} (\psi')_0 - \frac{g}{l} \int_0^\tau \psi dt = 0.$$

$\theta_0$  ist der Voraussetzung nach gleich Null;  $(x')_0$  und  $(\psi')_0$  sind zwei endliche Grössen, während beide in der letzten Formel vorkommende Integrale für äusserst kleine Werthe von  $\tau$  selbst verschwindend klein werden; es wird also

$$(\theta')_0 = -\frac{1}{l} \{ (x')_0 + s(\psi')_0 \},$$

was zu beweisen war.

Wegen der Beziehungen (6) und (7) kann man schreiben:

$$(\theta')_0 = -\frac{1}{l} \{ n_1 x_0 \cos \delta_1 + s n_2 \psi_0 \cos \delta_2 \}. \dots (24)$$

Setzen wir in der Gleichung (13) resp. (19) und in den aus ihnen durch einmalige Differentiation nach  $t$  erhaltenen Gleichungen  $t = 0$ , so ergeben sich zwei Gleichungen, aus welchen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sich ohne Schwierigkeit bestimmen lassen.

Es folgt also unter Berücksichtigung der Beziehung (24):

Im I Fall ( $\varepsilon < n$ )

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\beta_1}{\sqrt{R_1}} \{ \varepsilon \sin(\delta_1 - \Delta_1) + n_1 \cos(\delta_1 - \Delta_1) \} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_2}{\sqrt{R_2}} \{ \varepsilon \sin(\delta_2 - \Delta_2) + n_2 \cos(\delta_2 - \Delta_2) \} + \right. \\ \left. + \frac{1}{l} \{ n_1 x_0 \cos \delta_1 + s n_2 \psi_0 \cos \delta_2 \} \right] \dots (25)$$

und

$$\Gamma_2 = -\frac{\beta_1}{\sqrt{R_1}} \sin(\delta_1 - \Delta_1) - \frac{\beta_2}{\sqrt{R_2}} \sin(\delta_2 - \Delta_2) \dots (26)$$

Im II Fall ( $\varepsilon > n$ )

$$\Gamma_1 = \frac{\mathfrak{B} - \mu_2 \mathfrak{A}}{\mu_1 - \mu_2} \dots (27)$$

und

$$\Gamma_2 = -\frac{\mathfrak{B} - \mu_1 \mathfrak{A}}{\mu_1 - \mu_2} \dots (28)$$

Hierin bedeuten:

$$\mathfrak{A} = -\frac{\beta_1}{\sqrt{R_1}} \sin(\delta_1 - \Delta_1) - \frac{\beta_2}{\sqrt{R_2}} \sin(\delta_2 - \Delta_2), \dots (29)$$

$$\mathfrak{B} = \frac{n_1 \beta_1}{\sqrt{R_1}} \cos(\delta_1 - \Delta_1) + \frac{n_2 \beta_2}{\sqrt{R_2}} \cos(\delta_2 - \Delta_2) + \frac{1}{l} \{ n_1 x_0 \cos \delta_1 + s n_2 \psi_0 \cos \delta_2 \} \dots (30)$$

Wollen wir nun für jeden dieser beiden Hauptfälle einige Specialfälle betrachten.

**I. Fall.** ( $\varepsilon < n$ ).

**Fall A.**  $\varepsilon = 0$   $\delta_1$  und  $\delta_2$  willkürlich.

$$\theta = \Gamma_1 \sin nt + \Gamma_2 \cos nt + \frac{x_0}{l} \cdot \frac{n_1^2}{n^2 - n_1^2} \sin(n_1 t + \delta_1) + \frac{\psi_0}{l} \cdot \frac{n_2^2 s + g}{n^2 - n_2^2} \sin(n_2 t + \delta_2)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{x_0}{l} \cdot \frac{n n_1}{n^2 - n_1^2} \cos \delta_1 - \frac{n_2}{n} \cdot \frac{\psi_0}{l} \cdot \frac{n^2 s + g}{n^2 - n_2^2} \cos \delta_2$$

$$\Gamma_2 = -\frac{\beta_1}{n^2 - n_1^2} \sin \delta_1 - \frac{\beta_2}{n^2 - n_2^2} \sin \delta_2.$$

**Fall B.**  $\varepsilon = 0$   $\delta_1 = 0$   $\delta_2 = 0$ .

$$\theta = -\left\{ \frac{n n_1}{n^2 - n_1^2} \cdot \frac{x_0}{l} + \frac{n_2}{n} \cdot \frac{\psi_0}{l} \cdot \frac{n^2 s + g}{n^2 - n_2^2} \right\} \sin nt \\ + \frac{x_0}{l} \cdot \frac{n_1^2}{n^2 - n_1^2} \sin n_1 t + \frac{\psi_0}{l} \cdot \frac{n_2^2 s + g}{n^2 - n_2^2} \sin n_2 t.$$

**Fall C.**  $\varepsilon = n$   $\delta_1$  und  $\delta_2$  willkürlich.

$$\theta = -e^{-nt} \left[ \left\{ \frac{\beta_1}{n^2 + n_1^2} \sin(\delta_1 - \Delta_1) + \frac{\beta_2}{n^2 + n_2^2} \sin(\delta_2 - \Delta_2) \right\} (1 + nt) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{n_1 \beta_1}{n^2 + n_1^2} \cos(\delta_1 - \Delta_1) + \frac{n_2 \beta_2}{n^2 + n_2^2} \cos(\delta_2 - \Delta_2) + \frac{1}{l} (n_1 x_0 \cos \delta_1 + s n_2 \psi_0 \cos \delta_2) \right\} t \right] \\ + \frac{\beta_1}{n^2 + n_1^2} \sin(n_1 t + \delta_1 - \Delta_1) + \frac{\beta_2}{n^2 + n_2^2} \sin(n_2 t + \delta_2 - \Delta_2).$$

**Fall D.**  $\varepsilon = n$   $\delta_1 = 0$   $\delta_2 = 0$ .

$$\theta = e^{-nt} \left[ 2n \left\{ \frac{n_1 \beta_1}{(n^2 + n_1^2)^2} + \frac{n_2 \beta_2}{(n^2 + n_2^2)^2} \right\} - \left\{ n_1 \frac{x_0}{l} \cdot \frac{n^2}{n^2 + n_1^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + n_2 \frac{\psi_0}{l} \cdot \frac{n^2 s + g}{n^2 + n_2^2} \right\} t \right] + \frac{\beta_1}{n^2 + n_1^2} \sin(n_1 t - \Delta_1) + \frac{\beta_2}{n^2 + n_2^2} \sin(n_2 t - \Delta_2).$$

**II. Fall.** ( $\varepsilon > n$ ).

**Fall C.<sup>1)</sup>**  $\varepsilon = n$   $\delta_1$  und  $\delta_2$  willkürlich.

$$\theta = -e^{-nt} \left[ \left\{ \frac{\beta_1}{n^2 + n_1^2} \sin(\delta_1 - \Delta_1) + \frac{\beta_2}{n^2 + n_2^2} \sin(\delta_2 - \Delta_2) \right\} (1 + nt) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{n_1 \beta_1}{n^2 + n_1^2} \cos(\delta_1 - \Delta_1) + \frac{n_2 \beta_2}{n^2 + n_2^2} \cos(\delta_2 - \Delta_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{l} (n_1 x_0 \cos \delta_1 + s n_2 \psi_0 \cos \delta_2) \right\} t \right] + \frac{\beta_1}{n^2 + n_1^2} \sin(n_1 t + \delta_1 - \Delta_1) \\ + \frac{\beta_2}{n^2 + n_2^2} \sin(n_2 t + \delta_2 - \Delta_2).$$

<sup>1)</sup> Die Fälle A und B haben keinen Sinn mehr, da  $\varepsilon \geq n$  ist.



Diese Formel fällt mit derjenigen im Falle I (C) genau zusammen, was schon a priori zu erwarten war, folglich werden die Formeln im Falle D ebenfalls identisch.

Nach diesen theoretischen Ueberlegungen wollen wir nun zur Betrachtung der mit Hilfe der Plattform erhaltenen Curven der Bewegung des Horizontalpendels übergehen.

Es ist eine grosse Anzahl von Curven (im Ganzen bis 48) erhalten worden, aber wir werden nur die charakteristischeren von ihnen betrachten.

In den meisten Fällen wurden die Versuche so eingerichtet, dass die anfänglichen Phasen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  beider Sinusbewegungen für die Verschiebungen und Neigungen gleich Null waren.

Was nun die Einzelheiten der Ausmessung der Curven anbelangt, so verweise ich auf meine früher citierte Abhandlung «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen».

Die erste Curve № 1 (siehe Fig. 2) wurde bei ruhender Plattform und beim offenen Stromkreis im dämpfenden Electromagnet erhalten. Sie diente nur dazu, die Eigenperiode des Pendels zu bestimmen. Es ergab sich  $T = 9^s55$ .

Eine zweite ähnliche Curve № 24 (siehe Fig. 3) wurde nach Verlauf der Hälfte der Beobachtungen erhalten. In diesem Fall war aber der Electromagnet gänzlich entfernt worden. Die Curve zeigt jetzt eine äusserst kleine Dämpfung, während im ersten Fall die Dämpfung einen ziemlich beträchtlichen Werth besitzt, obgleich der Stromkreis offen war. Diese Dämpfung hat ihre Hauptursache in dem im Electromagnet zurückgebliebenen Magnetismus. Auf die Periode des Pendels hat jedoch dieser Umstand keinen merklichen Einfluss; aus der Curve № 24 ergab sich diese Periode  $T = 9^s57$ .

Nach Abschluss aller Beobachtungen wurde die Periode des Pendels, auch bei entferntem Electromagnet, abermals bestimmt (Curve № 48)<sup>1)</sup>. Es ergab sich  $T = 9^s59$ .

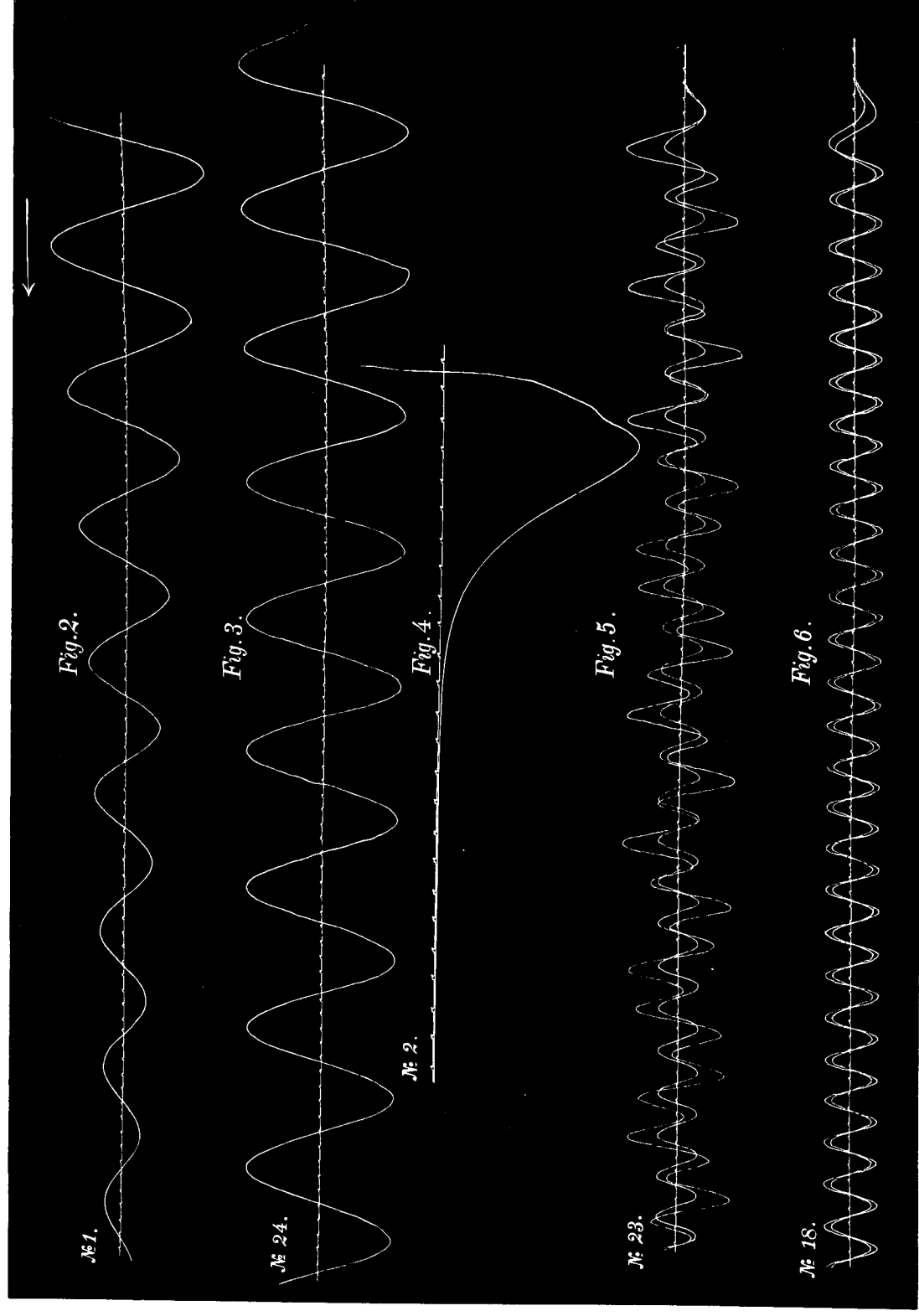
Im Mittel aus allen drei Bestimmungen folgt für die Eigenperiode des Pendels

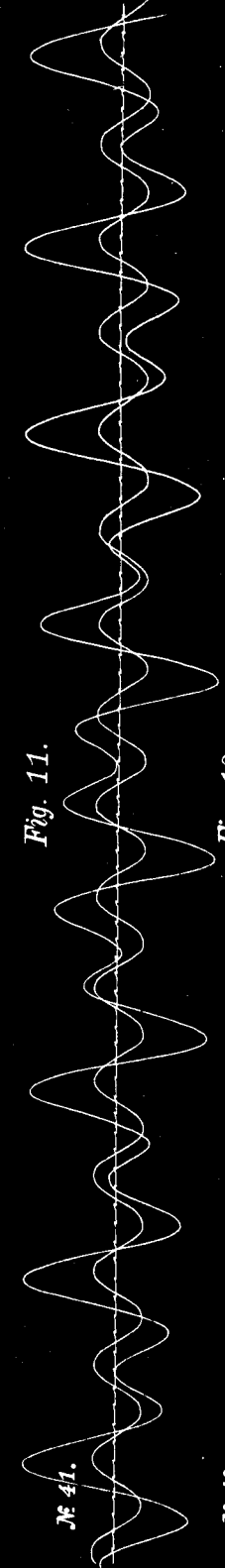
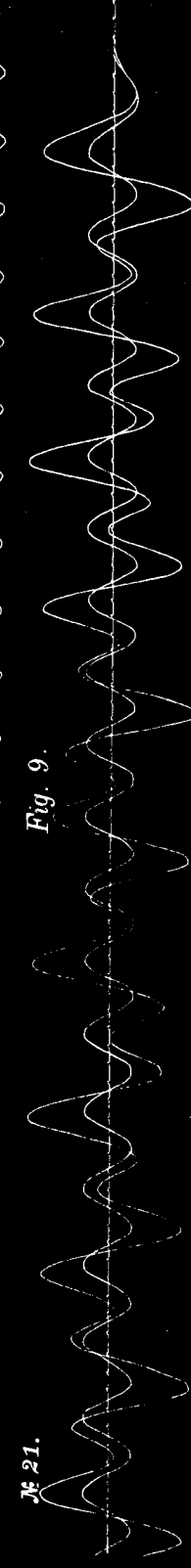
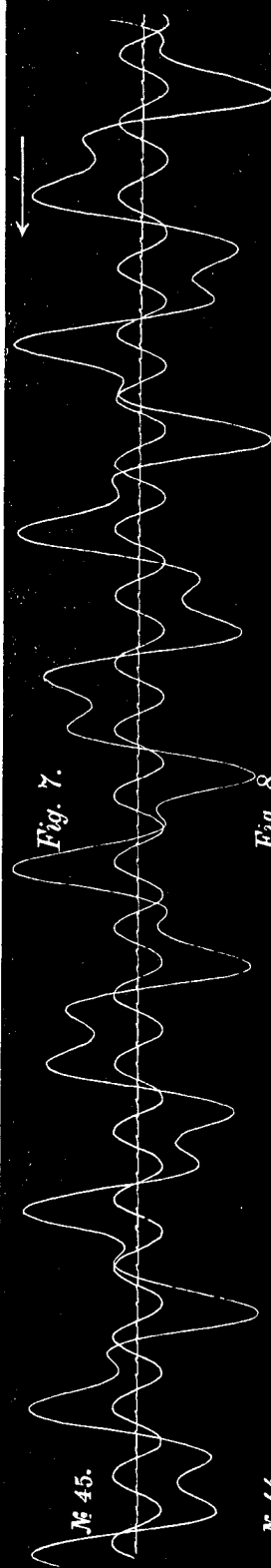
$$T = 9^s57.$$

Vermehrt man nun die Stromstärke  $i$  im Electromagnet, so wird die Dämpfung des Pendels immer grösser und grösser werden, und bei einer Stromstärke  $i = 2,1$  Amp. wird das Pendel schon in ein aperiodisches Instrument verwandelt.

---

<sup>1)</sup> Diese Curve ist hier nicht wiedergegeben.





Die entsprechende Curve № 2 ist auf der Fig. 4 dargestellt. Das Pendel wurde mit der Hand aus seiner Ruhelage entfernt, — daher die kleinen Unregelmässigkeiten am Anfang der Curve, — und alsdann sich selbst überlassen. In diesem Fall nähert sich das Pendel asymptotisch der Nulllinie ohne Schwingungen um seine Ruhelage auszuführen.

Die hier zu besprechenden Beobachtungen bestehen aus drei verschiedenen Versuchsreihen.

Bei der ersten wurde das Pendel nur dem Einfluss der Verschiebungen allein ausgesetzt.

Bei der zweiten wirkten auf dasselbe allein die Neigungen der Plattform, und schliesslich bei der dritten Reihe stand das Pendel zu gleicher Zeit unter dem Einfluss der Verschiebungen und Neigungen der Plattform.

Die Curven sind für jede Periode dieser Bewegungen paarweise erhalten worden.

Die eine Curve entspricht dem ungedämpften und die andere dem aperiodischen Pendel. Für das ungedämpfte Pendel wurde der Electromagnet in den meisten Fällen ganz entfernt, bei drei Curven aber, wo die Ausschläge des Pendels sehr gross ausfielen, wurde eine kleine Dämpfung zugelassen, indem der Electromagnet auf der Plattform stehen blieb, die Stromstärke  $i$  in demselben aber gleich Null gehalten wurde. (NB. Man vergleiche die Curve № 1.)

### Erste Versuchsreihe.

#### Verschiebungen.

№ der Curve.	№ der Figur.	$i$	$T_1$
23	5	Ohne Magnet.	2,90
18	6	2,1 Amp.	2,91
45	7	Ohne Magnet.	3,71
44	8	2,1	3,73
21	9	Ohne Magnet.	4,21
8	10	2,1	4,32
41	11	Ohne Magnet.	5,21
40	12	2,1	5,29
20	13	Ohne Magnet.	7,63
5	14	2,1	7,68

Betrachten wir nun die Curven №№ 23, 45, 21, 41 und 20, welche einem ungedämpften Pendel entsprechen, so sehen wir, dass sie recht compliciert ausfallen, obgleich die Plattform selbst eine einfache Sinusbewegung ausführt.

Vergleicht man weiter die Curven №№ 23, 21 und 20, bei welchen die anfänglichen Phasen  $\delta_1$  und die des Pendels selbst gleich Null waren, mit einander, so erkennt man sofort, dass mit wachsender Periode  $T_1$  der Verschiebungen der Plattform, d. h. bei Verkleinerung der Differenz zwischen der Eigenperiode  $T$  des Pendels und  $T_1$ , die Amplituden der Ausschläge desselben immer grösser werden.

Bei den Curven №№ 45 und 41 waren die anfänglichen Phasen nicht gleich Null, infolge dessen hängen die Amplituden der Ausschläge des Pendels im hohen Maasse von den Anfangsbedingungen der Bewegung ab.

Nun aber zeigen die anderen fünf Curven №№ 18, 44, 8, 40 und 5, dass beim Horizontalpendel, wenn dasselbe in ein aperiodisches Instrument verwandelt wird, der Einfluss seiner Eigenbewegung für nicht zu kleine Werthe von  $t$  gänzlich fortfällt und dasselbe eine Curve beschreibt, welche der der Plattformbewegung vollständig ähnlich ist; die Periode ist genau dieselbe ( $T_1$ ), nur tritt eine gewisse Phasenverschiebung ein; ausserdem sind die maximalen Amplituden der Ausschläge etwas geändert und zwar nehmen diese Amplituden des Pendels mit wachsenden Werthen von  $T_1$  stetig ab.

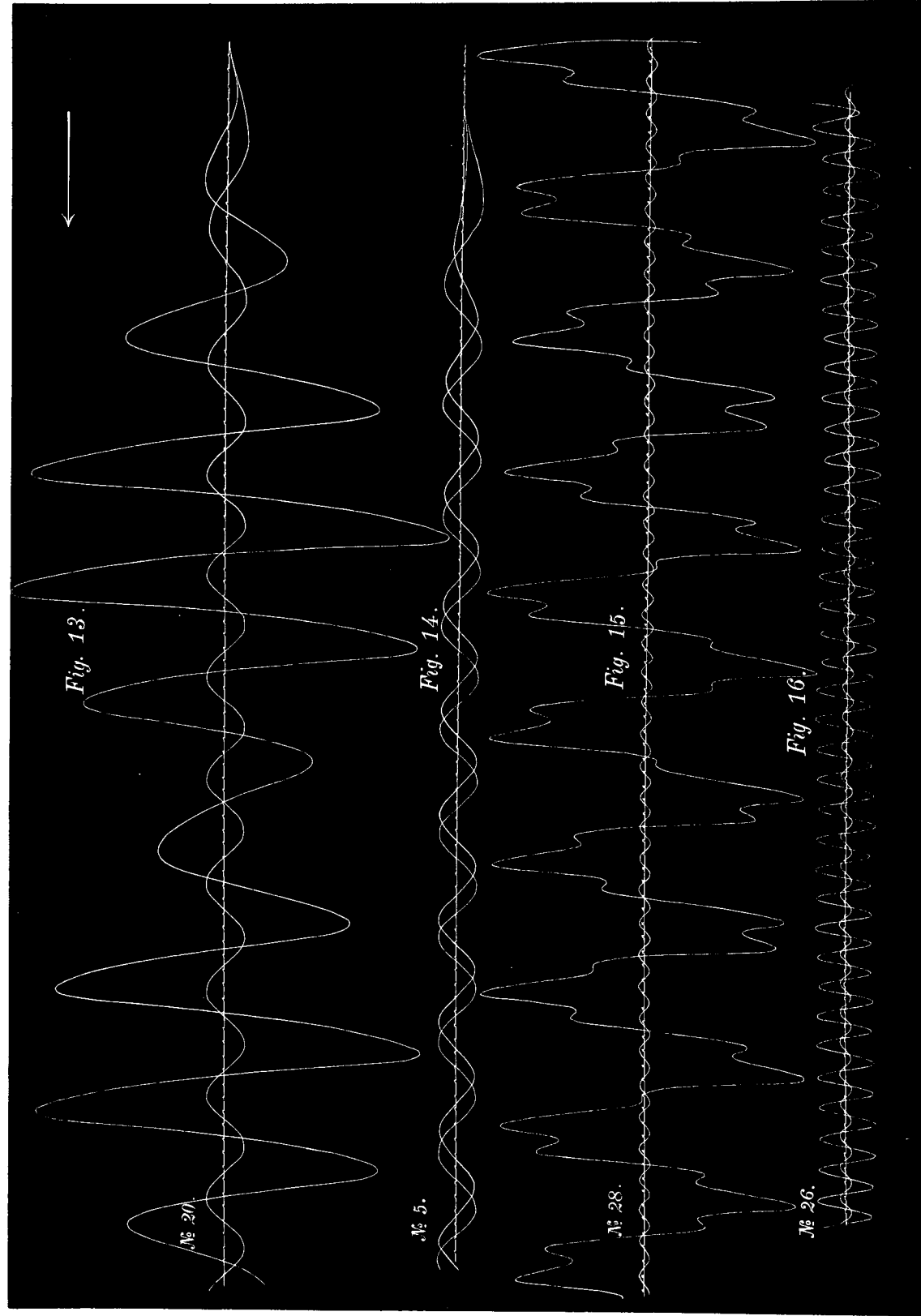
Das Verhalten aller dieser Curven steht im vollen Einklang mit der früher vorgeführten Theorie.

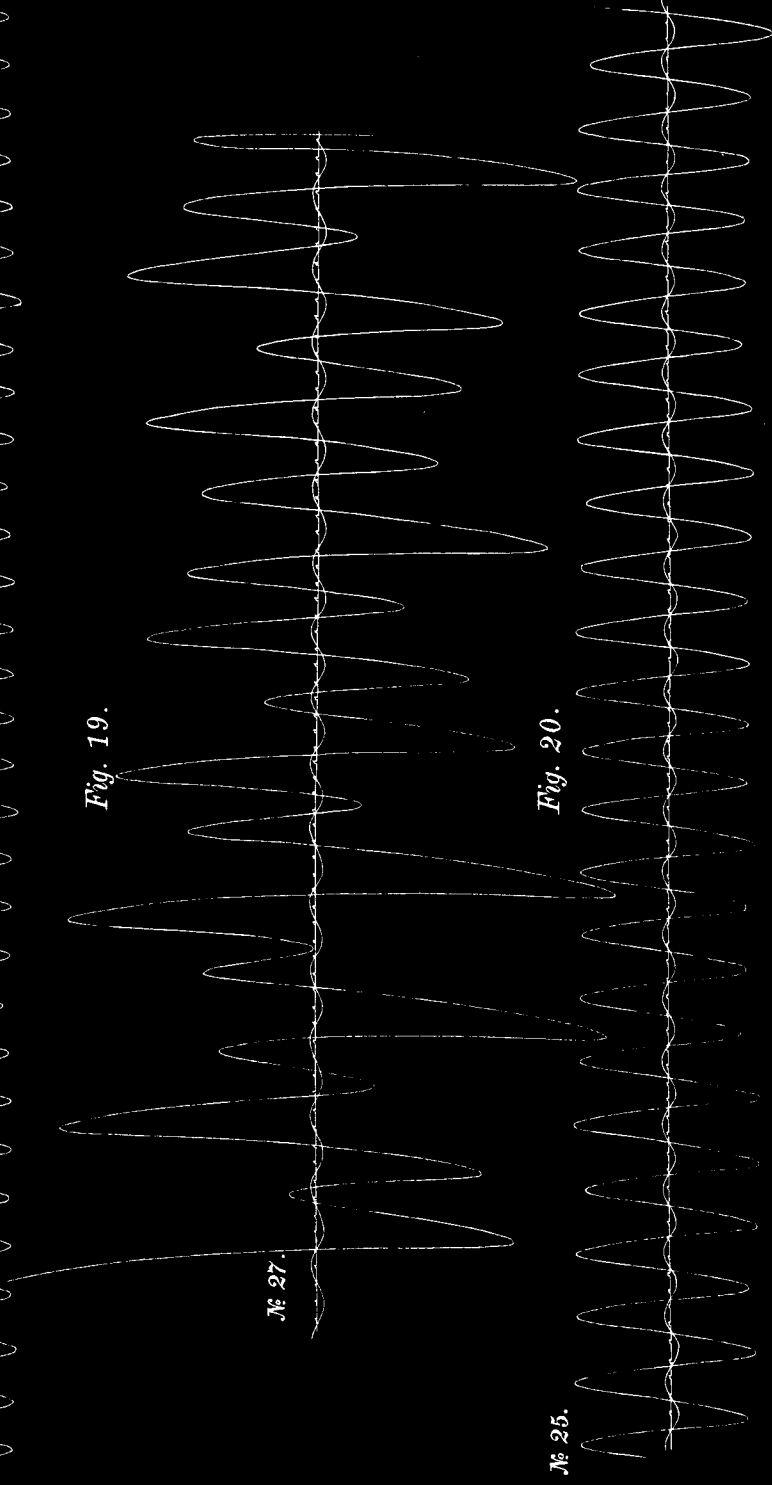
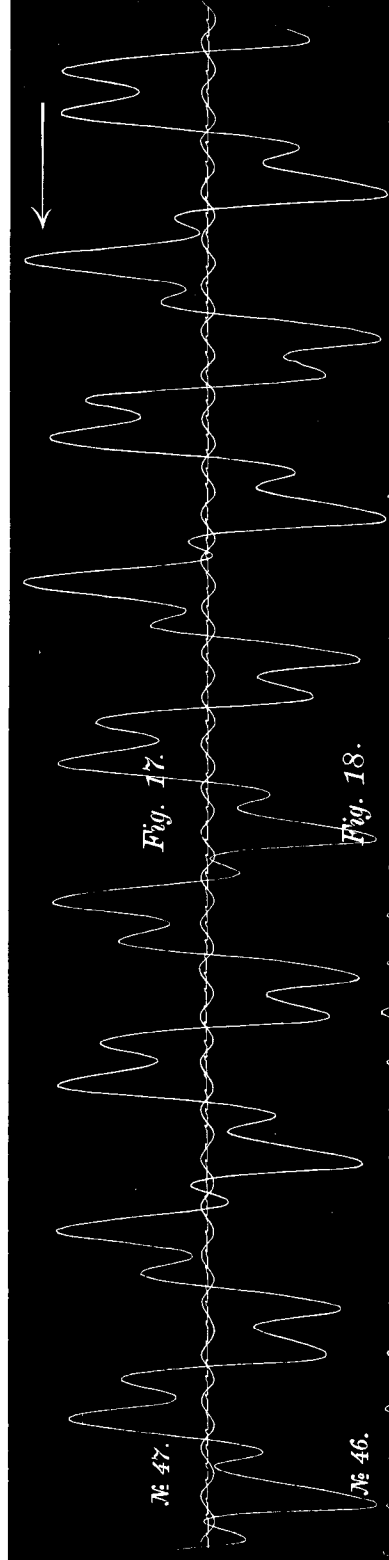
Ähnliche Curven habe ich schon in meiner früheren Abhandlung «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen» publiciert und ihre Eigenschaften dort anderweitig besprochen. Ich bin auf diese Frage hier nur der Vollständigkeit halber nochmals zurückgekommen.

### Zweite Versuchsreihe.

#### Neigungen.

№ der Curve.	№ der Figur.	$i$	$T_2$
28	15	Ohne Magnet.	2,28
26	16	2,1	2,15
47	17	Ohne Magnet.	2,72
46	18	2,1	2,78
27	19	0	4,22
25	20	2,1	3,67





Solche Versuche über die Bewegung eines Horizontalpendels unter dem Einflusse periodischer Neigungen der Plattform publiciere ich hier zum ersten Mal.

Betrachtet man die Curven №№ 28, 47 und 27, welche einem ungedämpften Pendel entsprechen, so sehen wir, dass die Bewegungen desselben unter dem Einfluss ganz einfacher periodischer Neigungen der Plattform äusserst compliciert ausfallen. Dabei weisen die Curven №№ 28 und 47 sehr eigenthümliche Zacken auf, die, wenn die Registriertrommel sich etwas langsamer gedreht hätte, so aussehen würden, als ob das Pendel in diesen Momenten gewisse Stösse erhalten hätte. In der That aber bewegt sich die Plattform ganz ruhig nach einem einfachen Sinusgesetz, und die Zacken haben also ihre Ursache nur in den Eigenschaften des Pendels selbst.

Diese Thatsache zeigt ganz deutlich, wie vorsichtig man vorgehen muss, wenn man aus den Zacken der Seismogramme Schlüsse über Stösse in der Erdbewegung während eines Erdbebens ziehen will.

Bei der Curve № 27, d. h. bei dem grössten Werth von  $T_2$ , waren die Ausschläge des Pendels so gross, dass man nicht mehr den dämpfenden Electromagnet ganz entfernen konnte. In diesem Falle, wie auch bei den weiter zu besprechenden Curven №№ 31 und 32, verfuhr man bei den Versuchen in folgender Weise. Man setzte die Plattform in Bewegung, während die Stromstärke im Electromagnet  $i = 2,1$  war. Das Pendel setzte sich in Bewegung und nach einigen Secunden öffnete man den Stromkreis und setzte in diesem Moment die Trommel in Gang. Auf diese Weise bekam man kleinere Ausschläge des Pendels, aber bei der Curve № 27 waren sie immer noch so gross, dass das Pendel schliesslich aus dem Bereich der Registriertrommel kam.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Curven №№ 26, 46 und 25 über, welche einem aperiodischen Pendel entsprechen, so sehen wir, dass für nicht zu kleine Werthe von  $t$  der Einfluss der Eigenbewegung des Pendels ebenfalls fortfällt. Die vom Pendel gezeichneten Curven schliessen sich sehr gut den Curven der Bewegung der Plattform an; es sind ebenfalls Sinuscurven mit genau derselben Periode  $T_2$ . Es tritt jedoch eine Phasenverschiebung ein; ausserdem sind die Amplituden der Pendelbewegung grösser und zwar, je grösser  $T_2$ , desto grösser wird auch die entsprechende maximale Amplitude des Pendelausschlags, alles im vollständigen Einklang mit der früher dargelegten Theorie.

Wir sehen also, wie vorthellhaft es auch im Falle von Neigungen ist ein Horizontalpendel in ein aperiodisches Instrument zu verwandeln. Aehnliche Betrachtungen, wie ich sie in meinem Aufsatz «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen» bezüglich der Bewegung eines periodi-



schen und aperiodischen Horizontalpendels unter dem Einflusse von Verschiebungen angestellt habe, lassen sich auch auf den Fall von Neigungen übertragen.

Zum Schluss möchte ich noch bemerken, dass diese eben besprochenen Versuche eigentlich keine ganz reinen Neigungsversuche waren, da bei ihnen die Entfernung des Stützpunktes des Pendels von der Drehungsaxe der Plattform  $s$  nicht Null war, sondern 22,7 cm. betrug. Infolge dessen war das Pendel bei Neigungen der Plattform auch kleinen Verschiebungen unterworfen, deren Maximalgrösse  $s\psi_0 = 1,2^m_m$  betrug. Da aber diese Verschiebungen dieselbe Periode  $T_2$  wie die Neigungen hatten, so hat diese Thatsache in dieser Frage keine wesentliche Bedeutung.

### Dritte Versuchsreihe.

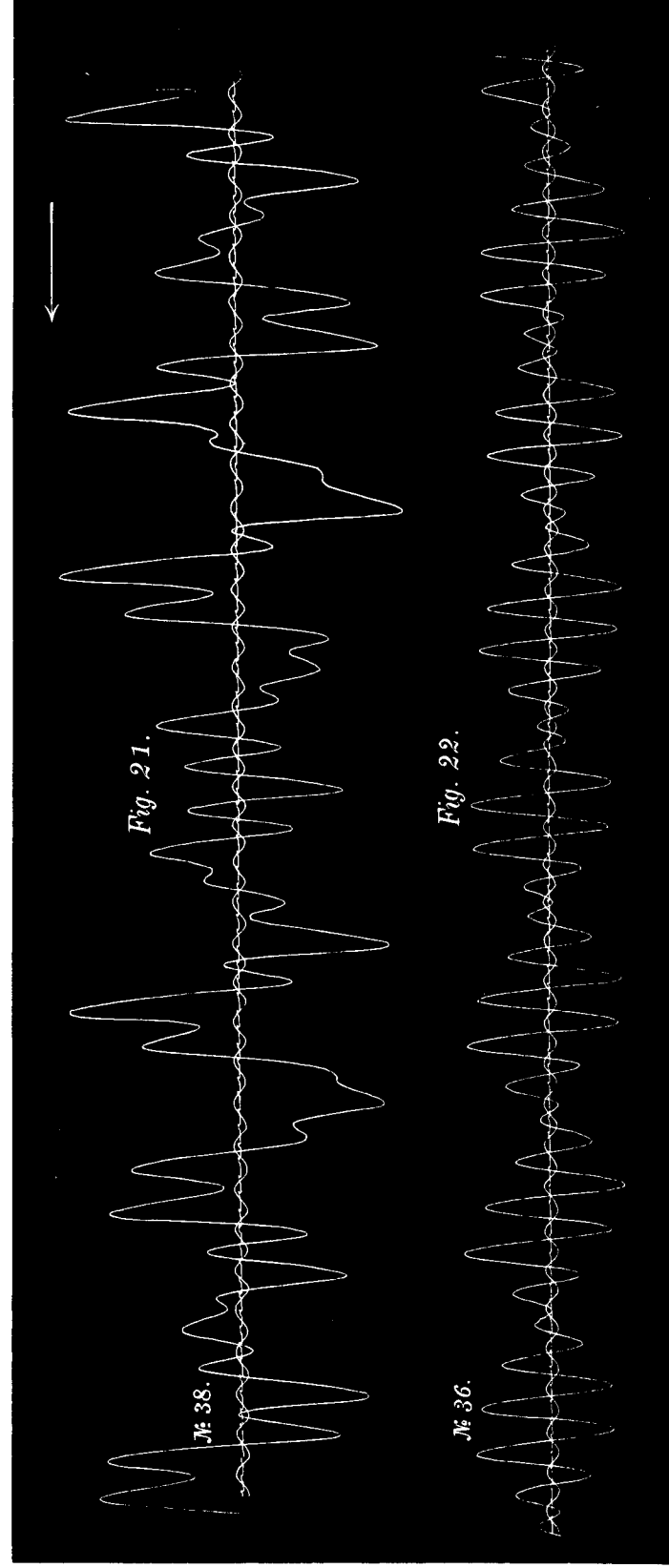
#### Verschiebungen und Neigungen.

N <sup>o</sup> der Curve.	N <sup>o</sup> der Figur.	$i$	$T_1$	$T_2$
38	21	Ohne Magnet.	3,08	2,47
36	22	2,1	3,08	2,43
39	23	Ohne Magnet.	4,02	3,27
37	24	2,1	3,99	3,26
31	25	0	4,46	2,39
29	26	2,1	4,48	2,42
32	27	0	5,63	3,09
30	28	2,1	5,68	3,23

Die Curven N<sup>o</sup> 38, 39, 31 und 32, welche einem ungedämpften Pendel entsprechen, fallen, wie wir sehen, wenn das Pendel dem Einfluss von Verschiebungen und Neigungen zugleich ausgesetzt ist, sehr compliciert aus. Sie entsprechen der Theorie nach einer dreifachen Sinuscurve.

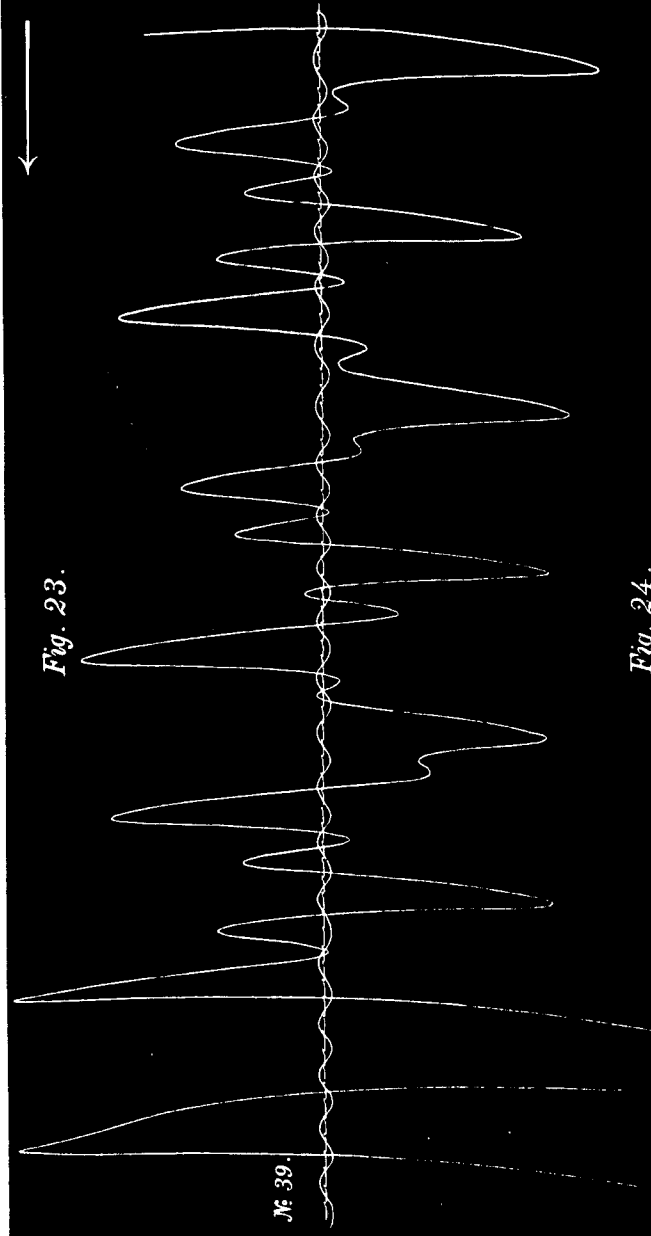
Die auf den Curven N<sup>o</sup> 31 und 32 dargestellten kleinen regelmässigen Sinusoiden geben die Neigungen der Plattform, die mittlere verzerrte Sinusoide die Verschiebungen derselben wieder. Die äussere Curve stellt die Bewegung des Pendels selbst dar.

Gehen wir zur Betrachtung der übrigen 4 Curven N<sup>o</sup> 36, 37, 29 und 30 über, welche bei denselben Voraussetzungen in Bezug auf die Werthe der Perioden  $T_1$  und  $T_2$  einem aperiodischen Pendel entsprechen, so sehen





*Fig. 23.*



№ 39.

*Fig. 24.*



№ 37.

Fig. 25.

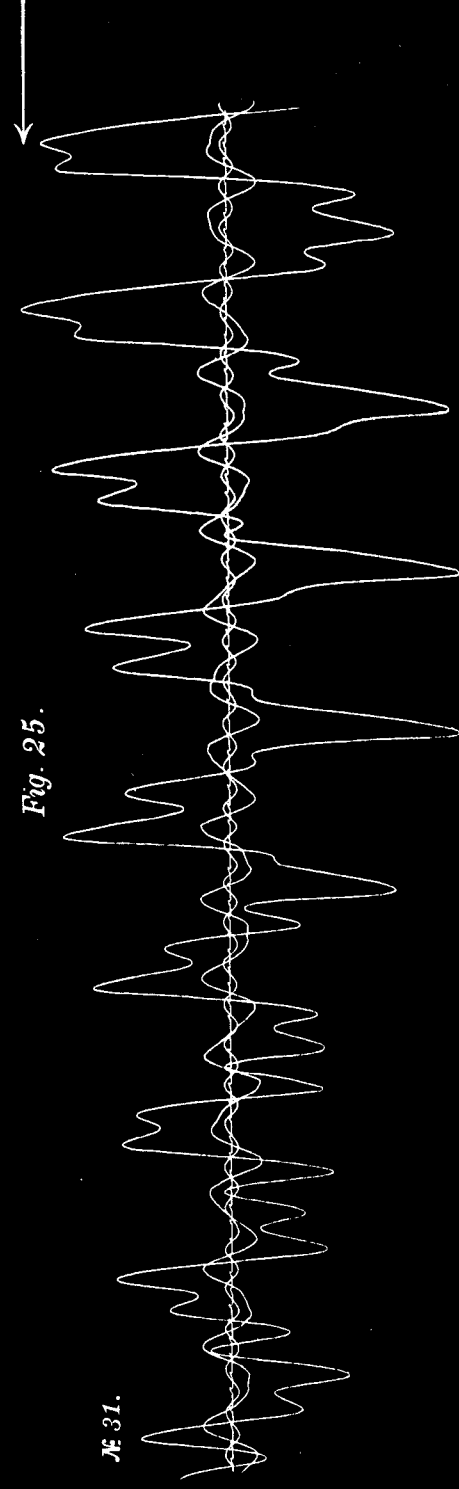
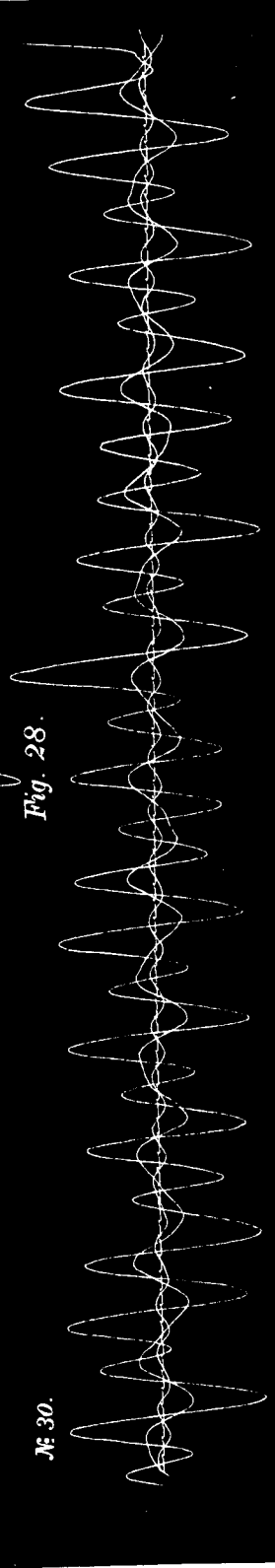
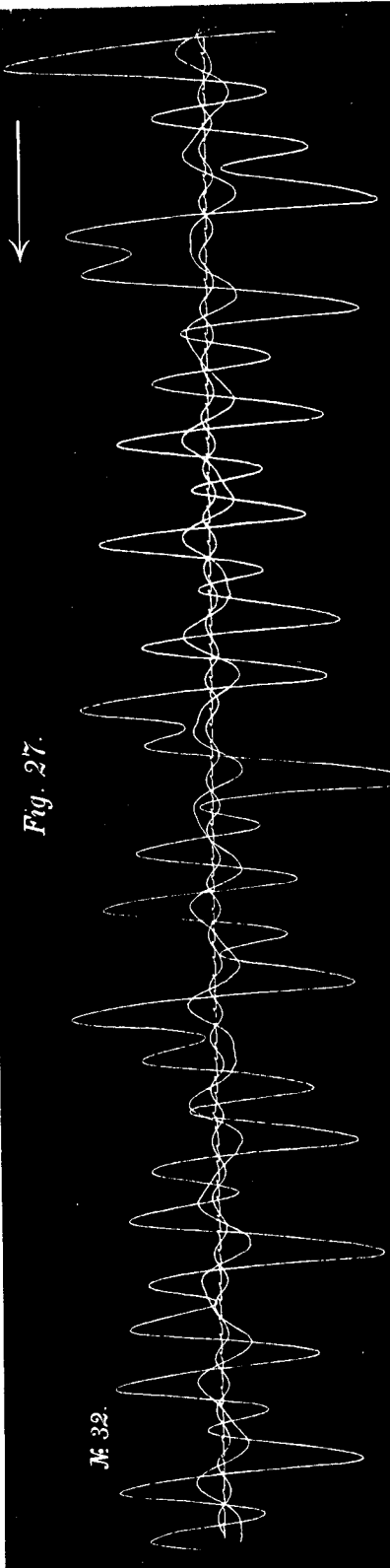


Fig. 26.





wir, dass dieselben viel einfacher als die 4 eben besprochenen Curven ausfallen. Sie entsprechen in der That jetzt schon einer doppelten Sinuscurve, da der Einfluss der Eigenbewegung des Pendels eliminiert wird (für nicht zu kleine Werthe von  $t$ ), aber sie bleiben immerhin doch zu compliciert, um für seismometrische Zwecke sehr nützlich zu sein.

Es wäre ganz und gar unmöglich die Verschiebungen von den Neigungen aus der Aufzeichnung eines Horizontalpendels zu trennen, auch wenn dasselbe in ein aperiodisches Instrument verwandelt wäre.

Es muss also ein Mittel gefunden werden, um die Neigungen ganz unabhängig von den etwaigen Verschiebungen zu registrieren.

Der Lösung dieser Aufgabe ist eben diese Abhandlung gewidmet.

---

### § 3.

#### Theorie des gestützten Davison'schen Apparates.

Ich habe in der Einleitung zu dieser Abhandlung bemerkt, dass der Davison'sche Apparat ein gegen Neigungen sehr empfindliches Instrument ist. Da er aber bei Verschiebungen wie ein Pendel in Schwingungen geräth, so habe ich vorgeschlagen, um diese Ausschläge möglichst zu vermeiden, an demselben von unten einen Stift anzubringen, welcher in eine kleine Höhlung hineinragt.

Ein solcher Apparat wurde nun vom Mechaniker des Physikalischen Laboratoriums der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Herrn Masing construirt und auf der beweglichen Plattform untersucht. Derselbe bestand aus einem schweren Messingcylinder, welcher von zwei Drähten ungleicher Länge getragen wurde. Die Länge der Drähte, wie auch die Entfernung zwischen denselben, konnte beliebig geändert werden. Das ganze System wurde an einem besonderen Gestell aufgehängt. Unten am Cylinder wurde der früher erwähnte Stift angebracht.

Dieser Apparat erwies sich in der That als sehr empfindlich gegen Neigungen. Bei den Verschiebungen der Plattform kam aber ein sehr wesentlicher Nachtheil dieser Einrichtung zum Vorschein. Der untere Stift sollte die Schwingungen des Apparates bei Verschiebungen verhindern, da aber der Schwerpunkt dieses beweglichen Systems viel höher als der Stützpunkt des Stiftes lag, so gerieth der Cylinder bei Verschiebungen der Plattform in's

Zittern, wobei er immer noch kleine Verschiebungen aufwies. Um diese zitternde Bewegung des Cylinders bei Verschiebungen möglichst zu vermeiden, versuchte ich die Entfernung zwischen dem Schwerpunkt des cylindrischen Gewichtes und dem Stützpunkt des Stiftes möglichst zu verkleinern.

Dazu wurde der Cylinder von unten theilweise durchgebohrt und in der Nähe des Schwerpunktes desselben ein kleiner Stift angebracht. Unter dem Gewicht und ganz frei von demselben wurde eine kleine Säule befestigt, welche mittelst einer Schraube gehoben oder gesenkt werden konnte. Oben auf der Säule war eine kleine Platte befestigt, welche eine sehr kleine conische Höhlung hatte. Wurde die Säule gesenkt, so konnte der Apparat sich ganz frei bewegen. Hob man sie aber nach oben, so konnte der Stift in die kleine Höhlung gebracht werden, wodurch die Unterstützung des Apparates erzielt wurde.

Die schematische Zeichnung auf der Fig. 29 giebt einen Ueberblick über diese ganze Einrichtung.

In Wirklichkeit hatte das Gewicht bei diesen Versuchen eine etwas andere Form, welche den Stift immer zu sehen und dadurch die Höhe der Platte mit der Höhlung passend zu regulieren gestattete.

Die mit diesem abgeänderten Apparat mit Hilfe der Plattform gemachten Versuche haben in der That gezeigt, dass die Verschiebungen derselben fast keinen Einfluss mehr auf die Bewegung des Apparates hatten. In dieser Hinsicht erwies sich also die getroffene Einrichtung als ganz zweckmässig, aber es kam dabei ein neuer Nachtheil zum Vorschein. Die Schwingungen des Apparates wurden in der That vermieden, aber die Empfindlichkeit desselben gegen Neigungen hatte dabei sehr viel eingebüsst.

Je kleiner die Entfernung  $\Delta$  zwischen dem Schwerpunkt des beweglichen Systems und dem Stützpunkte des Stiftes ist, desto unempfindlicher wird der Apparat gegen Neigungen. Das haben die Versuche ergeben.

Wollen wir jetzt die Theorie dieses Apparates besprechen und die Abhängigkeit der Empfindlichkeit desselben vom Werthe von  $\Delta$  klarlegen.

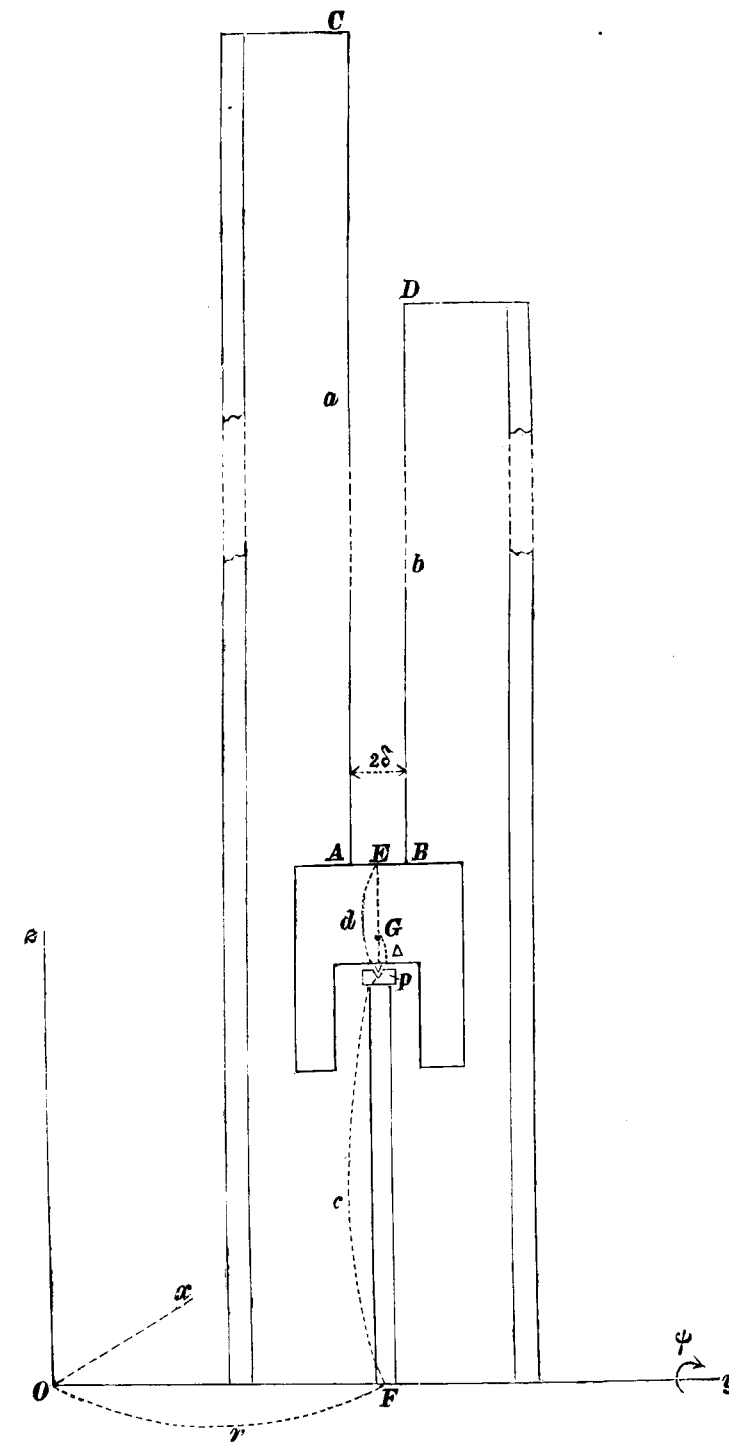
Setzen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem  $xyz$  voraus (siehe die Fig. 29), wobei die  $zy$ -Ebene mit derjenigen Ebene  $ACDB$  zusammenfallen soll, welche durch beide Drähte geht, wenn der Apparat in Ruhe ist. Die Länge der Drähte sei resp.  $a$  und  $b$ , die Entfernung zwischen denselben  $2\delta$ .

$GP = \Delta$  ist die Entfernung des Schwerpunktes  $G$  des beweglichen Systems vom Stützpunkte  $P$ ,

$EP = d$  die Entfernung von  $E$  vom Stützpunkt  $P$  und

$c$  die Entfernung dieses Stützpunktes von der  $y$ -Axe.  
 $r$  ist die Entfernung von  $F$  vom Anfangspunkte des Coordinatensystems  $O$ .

Fig. 29.



Es soll nun eine sehr kleine Drehung  $\psi$  um die  $y$ -Axe in der Richtung des Pfeiles stattfinden.

Es fragt sich nun, um welchen Winkel  $\theta$  wird der Apparat sich dabei um die  $EP$ -Axe drehen?

Wegen der Kleinheit von  $\psi$  wird das gesuchte  $\theta$  auch der Winkel zwischen  $AB$  und der  $y$ -Axe sein.

Ausserdem bestimmen wir den Winkel  $\omega$ , welchen die Normale  $PE$  zur oberen Fläche  $AB$  des Gewichtes mit der  $z$ -Axe bildet.

Zu diesem Zweck bestimmen wir zuerst die Coordinaten der Punkte  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $D$  und  $P$  vor und nach der Drehung. Der Einfachheit wegen setzen wir dabei

$$c + d = m \dots\dots\dots(31)$$

$$a + m = L \dots\dots\dots(32)$$

$$b + m = l \dots\dots\dots(33)$$

Coordinaten vor der Drehung.

$$\begin{array}{ll} A \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = r - \delta \\ z_1 = m \end{array} \right. & C \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0 \\ Y_1 = r - \delta \\ Z_1 = L \end{array} \right. \\ B \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ y_2 = r + \delta \\ z_2 = m \end{array} \right. & D \left\{ \begin{array}{l} X_2 = 0 \\ Y_2 = r + \delta \\ Z_2 = l \end{array} \right. \end{array}$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0^1) \\ y_0 = r \\ z_0 = c. \end{array} \right.$$

Die Coordinaten nach der Drehung wollen wir folgendermaassen bezeichnen:

Coordinaten nach der Drehung.

$$\begin{array}{ll} A \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \xi_1 \\ y'_1 = r - \delta + \eta_1 \\ z'_1 = m + \zeta_1 \end{array} \right\} \dots\dots(34) & C \left\{ \begin{array}{l} X'_1 = L \sin \psi \\ Y'_1 = r - \delta \\ Z'_1 = L \cos \psi \end{array} \right\} \dots\dots(35) \end{array}$$

<sup>1)</sup>  $P$  bedeutet die Spitze des Stiftes.

$$B \left\{ \begin{array}{l} x'_2 = \xi_2 \\ y'_2 = r + \delta + \eta_2 \\ z'_2 = m + \zeta_2 \end{array} \right\} \dots\dots(36) \quad D \left\{ \begin{array}{l} X'_2 = l \sin \psi \\ Y'_2 = r + \delta \\ Z'_2 = l \cos \psi. \end{array} \right\} \dots\dots(37)$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} x'_0 = (c + \epsilon) \operatorname{tg} \psi \\ y'_0 = r \\ z'_0 = c + \epsilon. \end{array} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$  und  $\epsilon$  sind 7 Unbekannte, über deren Vorzeichen wir keine Voraussetzungen machen.

Zwischen diesen Grössen besteht eine gewisse Anzahl von Beziehungen.

Die Entfernung zwischen  $A$  und  $C$  bleibt nämlich immer constant und gleich  $a$ , resp. die Entfernung zwischen  $B$  und  $D$  ist immer gleich  $b$ . Andererseits bleibt die Distanz zwischen der Spitze des Stiftes  $P$  und den Punkten  $A$  und  $B$  ebenfalls unveränderlich und gleich  $\rho$ , wo

$$\rho = + \sqrt{a^2 + \delta^2} \dots\dots\dots(39)$$

ist.

Ausserdem ist  $AB$  immer gleich  $2\delta$ .

Es muss also sein

$$\begin{aligned} (x'_1 - X'_1)^2 + (y'_1 - Y'_1)^2 + (z'_1 - Z'_1)^2 &= a^2 \\ (x'_2 - X'_2)^2 + (y'_2 - Y'_2)^2 + (z'_2 - Z'_2)^2 &= b^2 \\ (x'_1 - x'_0)^2 + (y'_1 - y'_0)^2 + (z'_1 - z'_0)^2 &= \rho^2 \\ (x'_2 - x'_0)^2 + (y'_2 - y'_0)^2 + (z'_2 - z'_0)^2 &= \rho^2 \\ (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 &= 4\delta^2. \end{aligned}$$

Setzen wir in diese Gleichungen die früher angegebenen Werthe der Coordinaten ein und beschränken uns dabei nur auf Glieder von der Ordnung  $\psi^2$ , so ergeben sich, mit Rücksicht auf die Gleichungen (31), (32), (33) und (39) und bei Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung  $\epsilon\psi^2, \zeta_1\psi^2, \zeta_2\psi^2, \epsilon\xi_1\psi$  und  $\epsilon\xi_2\psi$ , folgende Beziehungen, in welche der Kürze halber folgende Bezeichnungen eingeführt sind:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = f^2 \dots\dots\dots(40)$$

$$\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = g^2 \dots\dots\dots(41)$$

$$\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 = h^2 \dots\dots\dots(42)$$



$$f^2 + mL\psi^2 - 2L\xi_1\psi - 2a\zeta_1 = 0 \dots\dots\dots(43)$$

$$g^2 + ml\psi^2 - 2l\xi_2\psi - 2b\zeta_2 = 0 \dots\dots\dots(44)$$

$$f^2 + c^2\psi^2 - 2c\xi_1\psi - 2\delta\eta_1 + 2d\zeta_1 + \varepsilon^2 - 2d\varepsilon - 2\zeta_1\varepsilon = 0 \dots\dots(45)$$

$$g^2 + c^2\psi^2 - 2c\xi_2\psi + 2\delta\eta_2 + 2d\zeta_2 + \varepsilon^2 - 2d\varepsilon - 2\zeta_2\varepsilon = 0 \dots\dots(46)$$

$$f^2 + g^2 - 2h^2 - 4\delta(\eta_1 - \eta_2) = 0 \dots\dots\dots(47)$$

Diese fünf Gleichungen stellen fünf Beziehungen zwischen unseren sieben Unbekannten dar.

$\xi_1$  und  $\xi_2$  sind zwei kleine Grössen von derselben Ordnung wie  $\psi$ .

Was nun  $\varepsilon$  anbelangt, so lässt es sich leicht einsehen, dass ihm die Grössenordnung von  $\psi^2$  zukommt. In der That, wenn  $P$  das Gewicht des beweglichen Systems und  $M$  das Drehungsmoment bedeutet, wo  $M$  selbst proportional  $\psi$  sein muss, ergibt sich ohne Weiteres aus der bekannten Beziehung (zur Bestimmung von  $M$ ), nämlich

$$P \cdot d\varepsilon = Md\psi,$$

dass  $\varepsilon$  von derselben Grössenordnung, wie  $\psi^2$  sein muss.

Aus demselben Grunde und nach den Formeln (43) und (44) sind auch  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  von der Grössenordnung von  $\psi^2$ .

Folglich sind nach den Formeln (45) und (46) auch  $\eta_1$  und  $\eta_2$  von derselben Grössenordnung  $\psi^2$  (vergl. auch die Gleichung (47)).

Zieht man das in Betracht, so vereinfachen sich die früheren Gleichungen, bei Beibehaltung von Gliedern von der Ordnung  $\psi^2$ , in sehr bedeutender Weise.

Es wird nämlich

$$f^2 = \xi_1^2$$

$$g^2 = \xi_2^2$$

$$h^2 = \xi_1\xi_2$$

$$\xi_1^2 + mL\psi^2 - 2L\xi_1\psi - 2a\zeta_1 = 0 \dots\dots\dots(48)$$

$$\xi_2^2 + ml\psi^2 - 2l\xi_2\psi - 2b\zeta_2 = 0 \dots\dots\dots(49)$$

$$\xi_1^2 + c^2\psi^2 - 2c\xi_1\psi - 2\delta\eta_1 + 2d\zeta_1 - 2d\varepsilon = 0 \dots\dots\dots(50)$$

$$\xi_2^2 + c^2\psi^2 - 2c\xi_2\psi + 2\delta\eta_2 + 2d\zeta_2 - 2d\varepsilon = 0 \dots\dots\dots(51)$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 - 4\delta(\eta_1 - \eta_2) = 0 \dots\dots\dots(52)$$

Wollen wir nun aus diesen Gleichungen  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  eliminieren.

Addiert man die Gleichungen (50) und (51), so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (52)

$$8d \cdot \varepsilon = (\xi_1 + \xi_2)^2 + 4c^2\psi^2 - 4c(\xi_1 + \xi_2)\psi + 4d(\zeta_1 + \zeta_2) \dots\dots(53)$$

$\zeta_1$  und  $\zeta_2$  lassen sich resp. aus den Gleichungen (48) und (49) ermitteln. Bringt man ihre Werthe aus denselben in die Gleichung (53) ein, so folgt

$$8d \cdot \varepsilon = (\xi_1 + \xi_2)^2 + 4c^2\psi^2 - 4c(\xi_1 + \xi_2)\psi + (p\xi_1^2 + q\xi_2^2) + \dots\dots(54)$$

$$+ m(pL + ql)\psi^2 - 2(pL\xi_1 + ql\xi_2)\psi.$$

Hierin bedeuten

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{2d}{a} \\ q &= \frac{2d}{b}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

Die Gleichung (54) genügt noch nicht unser Problem zu lösen, da sie 3 Unbekannte, nämlich  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  und  $\varepsilon$  enthält. Wir müssen also noch zwei andere Bedingungen heranziehen. Dieselben werden durch die Gleichgewichtsbedingungen unseres beweglichen Systems gegeben.

Wollen wir zu diesem Zweck zuerst die Cosinusse der Winkel einiger Richtungen auf unserer Fig. 29 mit den Coordinatenachsen bestimmen.

Geht eine Gerade durch zwei Punkte  $M_1$  und  $M_2$ , dessen Coordinaten resp.  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  sind, hindurch, so werden bekanntlich die Cosinusse der Winkel  $\lambda, \mu$  und  $\nu$  zwischen der Richtung  $M_1M_2$  und den Coordinatenachsen durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ \cos \mu &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ \cos \nu &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

Seien nun für die Richtung  $AB$  (von  $A$  nach  $B$ ), zwischen den Befestigungspunkten der Drähte, die Winkel mit den Coordinatenachsen  $\alpha, \beta, \gamma$ ,

dann ergibt sich aus den Formeln (56), (34) und (36) unter Beibehaltung von Gliedern niedriger Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \\ \cos \beta &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \right)^2 \\ \cos \gamma &= \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

Für die Richtung  $PE$  seien die entsprechenden Winkel  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ . Es folgt ohne Weiteres in ähnlicher Weise auf Grund derselben Formeln und der Gleichungen (38) und (31) und unter Berücksichtigung, dass  $E$  in der Mitte zwischen  $A$  und  $B$  liegt,

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_0 &= \frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d} \\ \cos \beta_0 &= \frac{\eta_1 + \eta_2}{2d} \\ \cos \gamma_0 &= 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d} \right\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

Unsere gesuchten Winkel sind  $\theta$  und  $\omega$ .

Nun ist

$$\theta = \beta$$

und

$$\omega = \gamma_0.$$

Aus der zweiten der Formeln (57) und der dritten der Formeln (58) erhält man sofort

$$\theta = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \dots\dots\dots (59)$$

und

$$\omega = \frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d} \dots\dots\dots (60)$$

Denken wir uns nun eine Gerade  $T$ , welche in der oberen Fläche unseres cylindrischen Gewichtes liegt und senkrecht zu  $AB$  ist, wobei noch  $T$  nach der Seite der positiven  $x$ -Axe gerichtet ist. Die Winkel, welche diese Richtung mit den Coordinatenaxen bildet, seien  $\lambda, \mu$  und  $\nu$ .

$T$  muss also senkrecht zu  $AB$  und  $PE$  sein.

<sup>1)</sup>  $\theta$  ist positiv, wenn die Richtung  $AB$  zwischen der positiven  $x$ - und  $y$ -Axe liegt.

Wir haben also die folgenden zwei Bedingungen

$$\begin{aligned} \cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma &= 0 \\ \cos \lambda \cos \alpha_0 + \cos \mu \cos \beta_0 + \cos \nu \cos \gamma_0 &= 0. \end{aligned}$$

Fügt man noch die Bedingung

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$$

hinzu, so hat man drei Gleichungen, aus welchen  $\lambda, \mu$  und  $\nu$  sich ermitteln lassen.

Es ist unter Beibehaltung von Gliedern erster Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= 1 \\ \cos \mu &= -\frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \\ \cos \nu &= -\frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

Bezeichnen wir noch die Winkel, welche die Richtungen  $AC$  ( $a$ ) und  $BD$  ( $b$ ) mit den Coordinatenaxen bilden, resp. durch  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2$  und  $\gamma_2$ .

Es ergibt sich nun auf Grund der Gleichungen (56), (34), (35), (36), (37), (32) und (33) unter Beibehaltung von Gliedern niedrigster Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{L\psi - \xi_1}{a} \\ \cos \beta_1 &= -\frac{\eta_1}{a} \\ \cos \gamma_1 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{l\psi - \xi_2}{b} \\ \cos \beta_2 &= -\frac{\eta_2}{b} \\ \cos \gamma_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

Bedeutet nun  $P$  das Gewicht unseres beweglichen Systems, so wird, wegen der Kleinheit des Winkels  $\omega$ , bis auf Glieder höherer Ordnung die Spannung beider Drähte gleich  $P$  sein. Da aber noch der Schwerpunkt des Systems  $G$  auf der Axe  $PE$  liegt, welche durch die Mitte zwischen den

Befestigungspunkten  $A$  und  $B$  der Drähte hindurchgeht, so werden beide Drähte gleich stark gespannt.<sup>1)</sup>

Ist  $F$  die Spannung jedes Drahtes, so wird

$$F = \frac{P}{2}.$$

Bedeutet nun  $\hat{a}T$  den Winkel zwischen  $AC$  und  $T$  und  $\hat{b}T$  den Winkel zwischen  $BD$  und  $T$ , so muss beim Gleichgewicht, damit kein Drehungsmoment um die Axe  $PE$  entsteht,

$$F \cos(\hat{a}T) = F \cos(\hat{b}T)$$

sein.

Nun ergibt sich aber aus den Gleichungen (61), (62) und (63), wiederum bei Beibehaltung nur von Gliedern niedriger Ordnung,

$$\cos(\hat{a}T) = \frac{L\psi - \xi_1}{a} - \frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d} \dots\dots\dots (64)$$

und

$$\cos(\hat{b}T) = \frac{l\psi - \xi_2}{b} - \frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d} \dots\dots\dots (65)$$

Wir erhalten also noch die folgende Beziehung zwischen  $\xi_1$  und  $\xi_2$ :

$$\frac{L\psi - \xi_1}{a} = \frac{l\psi - \xi_2}{b} \dots\dots\dots (66)$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Beziehungen (55), (32) und (33)

$$\xi_2 = \frac{1}{q} \{p\xi_1 + m(q-p)\psi\} \dots\dots\dots (67)$$

Setzt man diesen Werth von  $\xi_2$  in die Formel (54) ein, so nimmt dieselbe folgende vereinfachte Gestalt an:

$$8q^2 \cdot d \cdot \varepsilon = \mathfrak{A}\xi_1^2 - 2m\mathfrak{A}\xi_1\psi + \{m^2\mathfrak{A} - 4cdq^2\}\psi^2, \dots\dots (68)$$

wo

$$\mathfrak{A} = (p+q)(p+q+pq) \dots\dots\dots (69)$$

ist.

Es fehlt also nur noch eine Beziehung zwischen  $\varepsilon$  und  $\xi_1$ , um alle unsere Unbekannten bestimmen zu können.

<sup>1)</sup> Bei meinem Apparat gingen die Drähte  $a$  und  $b$ , welche einem ganzen Stück Draht entsprachen, über eine kleine Rolle am oberen Theile des Gewichtes, somit waren diese Drähte immer gleich stark gespannt.

Diese Beziehung lässt sich aus der Gleichgewichtsbedingung auf zweierlei Art gewinnen.

#### Erste Methode.

Beim Gleichgewicht muss die Erhebung  $H$  des Schwerpunktes  $G$  unseres beweglichen Systems ein Minimum sein.

Es ist leicht einzusehen, dass

$$H = z'_0 + \Delta \cos \gamma_0$$

ist, oder, nach der dritten der Gleichungen (38) und (58),

$$H = c + \varepsilon + \Delta - \frac{\Delta}{2} \left\{ \frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d} \right\}^2,$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (67) und (31),

$$H = (c + \Delta) + \varepsilon - \frac{\Delta}{2} \left\{ \frac{(p+q)\xi_1 + [2dq - m(p+q)]\psi}{2d \cdot q} \right\}^2.$$

Die Gleichgewichtsbedingung fordert

$$\frac{dH}{d\xi_1} = 0.$$

Man kann also schreiben

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi_1} = \Delta \cdot \left\{ \frac{(p+q)\xi_1 + [2dq - m(p+q)]\psi}{2d \cdot q} \right\} \cdot \frac{(p+q)}{2dq}.$$

Nach den Formeln (68) und (69) hat man ebenfalls

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi_1} = \frac{(p+q)(p+q+pq)(\xi_1 - m\psi)}{4dq^2}.$$

Vergleicht man beide Ausdrücke für  $\frac{d\varepsilon}{d\xi_1}$  mit einander, so ersieht man, dass

$$\xi_1 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{p+q}{p+q+pq}} \left\{ m + \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{2dq - m(p+q)}{p+q+pq} \right\} \psi \dots\dots (70)$$

ist, und nach der Formel (67)

$$\xi_2 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{p+q}{p+q+pq}} \left\{ m + \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{2dp - m(p+q)}{p+q+pq} \right\} \psi \dots\dots (71)$$

$\xi_1$  und  $\xi_2$  sind also völlig bestimmt, folglich lassen sich alle anderen Unbekannten aus den früheren Gleichungen unmittelbar ableiten.

**Zweite Methode.**

Statt das Minimum von  $H$  aufzusuchen, kann man die nöthige Gleichgewichtsbedingung in einer anderen Form ausdrücken.

Beim Gleichgewicht muss nämlich das resultierende Drehungsmoment um eine zu  $AB$  parallele Axe, die durch den Stützpunkt  $P$  hindurchgeht, gleich Null sein.

Es muss also

$$F [\cos(\hat{aT}) + \cos(\hat{bT})] d = P \cdot \cos v \cdot \Delta$$

sein.

Da aber

$$F = \frac{P}{2}$$

und

$$\cos(\hat{aT}) = \cos(\hat{bT})$$

ist, so folgt nach der Gleichung (64) und der dritten der Gleichungen (61)

$$\frac{L\psi - \xi_1}{a} - \frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d} = -\frac{\Delta}{d} \cdot \frac{\xi_1 + \xi_2 - 2c\psi}{2d}.$$

Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (67), (31), (32) und der ersten der Gleichungen (55)

$$\xi_1 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{p+q}{p+q+pq}} \left\{ m + \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{2d q - m(p+q)}{p+q+pq} \right\} \psi,$$

also dieselbe Formel wie früher.

Hat man nun  $\xi_1$  und  $\xi_2$  einmal bestimmt, so lassen sich die gesuchten Winkel  $\theta$  und  $\omega$  aus den Formeln (59) und (60) leicht bestimmen.

Es ist, mit Rücksicht auf die Gleichung (31),

$$\theta = \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{p+q}{p+q+pq}} \cdot \frac{p-q}{p+q+pq} \cdot \frac{\Delta}{s} \cdot \psi$$

und

$$\omega = \frac{\psi}{1 - \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{p+q}{p+q+pq}}.$$

Setzen wir zur Vereinfachung

$$s = \frac{a+b}{2} + d, \dots\dots\dots(72)$$

so folgt aus den Gleichungen (55)

$$\frac{p+q}{p+q+pq} = \frac{a+b}{2s},$$

$$\frac{p-q}{p+q+pq} = -\frac{a-b}{2s}.$$

Es wird also

$$\theta = -\frac{1}{1 - \frac{a+b}{2s} \cdot \frac{\Delta}{d}} \cdot \frac{\Delta}{s} \cdot \frac{a-b}{2s} \cdot \psi \dots\dots\dots(73)$$

und

$$\omega = \frac{1}{1 - \frac{a+b}{2s} \cdot \frac{\Delta}{d}} \cdot \psi \dots\dots\dots(74)$$

Die Formel (73) lehrt uns folgendes.

Wäre der Davison'sche Apparat vollständig frei, also ungestützt, so würde die Drehung desselben bei einer Neigung der Unterlage um den Winkel  $\psi$  gleich  $\theta_1$  sein, wo bekanntlich

$$\theta_1 = \frac{a-b}{2s} \psi^1) \dots\dots\dots(75)$$

wird.

Im jetzigen Falle aber, wo der Apparat gestützt ist, wird die entsprechende Drehung nach der Formel (73) gleich

$$\theta = \frac{1}{1 - \frac{a+b}{2s} \cdot \frac{\Delta}{d}} \cdot \frac{\Delta}{s} \theta_1, \dots\dots\dots(76)$$

also im Verhältniss von  $\frac{1}{1 - \frac{a+b}{2s} \cdot \frac{\Delta}{d}} \cdot \frac{\Delta}{s}$  zu 1 kleiner sein.

Was nun die Neigung  $\omega$  der Axe des Instruments  $PE$  anbelangt, so unterscheidet sich dieselbe für kleine Werthe von  $\Delta$  nach der Formel (74) recht wenig von  $\psi$ .

Um die Verrückungen des Apparates bei Verschiebungen der Unterlage möglichst zu vermeiden, muss  $\Delta$  klein gewählt werden, jedoch büsst dabei die Empfindlichkeit des Instruments sehr viel ein. Wäre  $\Delta$  gleich Null gemacht, so würde der Apparat bei Neigungen überhaupt keine Drehung anzeigen.

Dieses Resultat steht in voller Uebereinstimmung mit den Erfahrungsthat-sachen.

<sup>1)</sup> Unabhängig vom Vorzeichen.

Um mich von der Richtigkeit der vorgeführten Theorie zu überzeugen, habe ich specielle Versuche unternommen, wobei die Winkel  $\psi$ ,  $\theta$  und  $\omega$  getrennt gemessen wurden.

Zu diesem Zweck wurde der früher beschriebene gestützte Davison'sche Apparat auf der Untersuchungsplattform aufgestellt und derselben die maximale mögliche Neigung  $\psi$  gegeben.

Die entsprechende Drehung  $\theta$  und Neigung  $\omega$  des Apparates wurde nach der gewöhnlichen optischen Methode mittelst Fernrohr und Scala gemessen.

Es ergab sich

$$\psi = 0^\circ 17' 57''$$

$$\theta = 0^\circ 2' 34''$$

$$\omega = 0^\circ 18' 18''.$$

Die Ausmessung des Apparates ergab

$$a = 90,44 \text{ cm.},$$

$$b = 45,22 \text{ „}$$

$$2\delta = 0,78 \text{ „}$$

$$d = 19,06 \text{ „}$$

$$c = 34,94 \text{ „},$$

$$s = 86,89 \text{ cm.}$$

also

Mit diesen Daten liess sich  $\Delta$  nach der Formel (73) berechnen. Es ergab sich

$$\Delta = -0,216 \text{ cm.}$$

Der Schwerpunkt befand sich also unterhalb des Stützpunktes  $P$ .

Aus der Formel (74) ermittelte man weiter die Neigung des Apparates

$$\omega = 0^\circ 17' 48''.$$

Der Unterschied von dem direct gemessenen Werth von  $\omega$  beträgt nur  $30''$ , was nur  $0,34 \text{ m}_m$  auf der Scala bei der Spiegelablesung ausmachen würde.

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung kann also als eine ganz befriedigende bezeichnet werden.

Wäre der Davison'sche Apparat vollständig frei gewesen, so würde er sich bei einer Neigung  $\psi$  der Unterlage von  $0^\circ 17' 57''$  um etwa  $17^\circ$  gedreht haben, wo  $\theta_1$  also ungefähr 57 mal grösser als  $\psi$  wäre.

In Wirklichkeit aber, wo der Apparat gestützt war, war die Drehung  $\theta$  nur  $0^\circ 2' 34''$ , also 7 mal kleiner als  $\psi$  und etwa 400 mal kleiner als  $\theta_1$ .

Wir sehen also, dass ein in der Nähe des Schwerpunktes gestützter Davison'scher Apparat, obgleich er sich der störenden Wirkung der Verschiebungen entzieht, doch in Bezug auf Neigungen sich als ziemlich unempfindlich erweist.

Ich sah mich also genöthigt auf die Stützung des Apparates zu verzichten und mein Bestreben darauf zu richten, eine solche Vorrichtung zu treffen, wo die Verschiebungen (Schwingungen) des Apparates nicht registriert werden und nur die Drehungen desselben zum Ausdruck kommen.

Dies lässt sich in der That durch eine electromagnetische Vorrichtung erreichen, wie wir es im nächsten Paragraphen sehen werden.

#### § 4.

#### Electromagnetische Vorrichtung zum Registriren von Drehungen allein.

Um die Drehungen des Davison'schen Apparates allein zu registrieren, ganz unabhängig von den Verschiebungen desselben, scheint die einfachste Methode diejenige zu sein, am Gewichte des Apparates einen kleinen verticalen Spiegel zu befestigen und die gewöhnliche optische Registriermethode anzuwenden. Bei einem freien Davison'schen Apparat lässt sich jedoch diese Methode nicht anwenden. Bei Verschiebungen und Neigungen der Unterlage setzt sich nämlich derselbe in Schwingungen, welche zur Folge haben, dass der Lichtpunkt auf der Registriertrommel sich der Zeit-Axe entlang verschieben wird, was die Aufzeichnungen bei Drehung des Apparates ganz verderben würde. Die Abscissen der verschiedenen Punkte der so erhaltenen Curven würden nicht den zugehörigen richtigen Zeitmomenten entsprechen, und es würde äusserst schwierig, wenn nicht vielleicht ganz unmöglich sein, eine solche Curve zu bearbeiten und zu verwerthen.

Es lässt sich jedoch mit Hilfe einer einfachen electromagnetischen Vorrichtung die Registrierung der Verschiebungen des Apparates ganz ausschliessen und nur die Drehungen desselben wirksam machen.

Denken wir uns nämlich am Gewichte von unten eine horizontale Leiste  $AB$  befestigt, wie dies in den schematischen Fig. 30 und 31 zu sehen ist, und zwar senkrecht zur Ebene der Drähte. An jedem Ende dieser Leiste sei eine kleine electromagnetische Spule mit einer grossen Anzahl von Windungen befestigt. Jede Spule ragt theilweise in das möglichst homogene

Feld eines Electromagnets hinein ( $M_1$  und  $M_2$ ). Die Enden jeder Spule seien mit den Windungen eines und desselben aperiodischen Galvanometers verbunden. Somit haben wir zwei parallele Stromkreise mit einem gemeinsamen Theil, nämlich den Windungen der Galvanometerspule selbst. Bei einer Verschiebung des Apparates parallel zur Richtung  $AB$  wird in jeder Spule ein electrischer Strom inducirt, dessen Intensität von der Feldstärke des Electromagnets und dem Widerstande des entsprechenden Stromkreises unmittelbar abhängt.

Fig. 30.

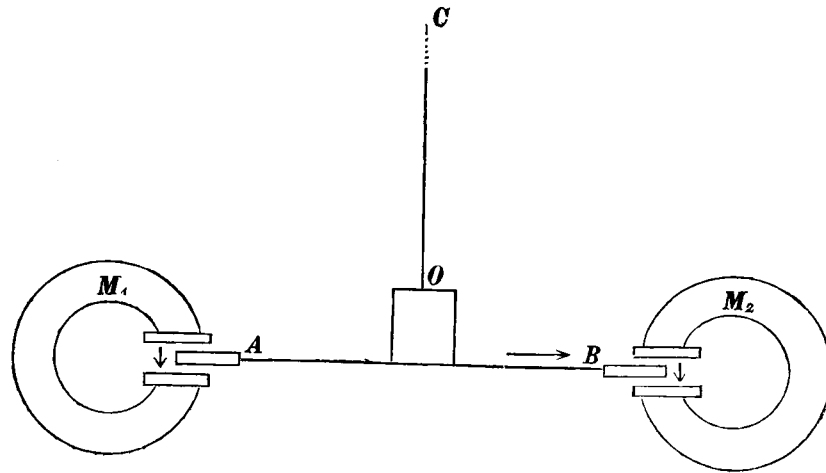
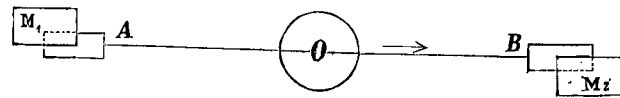


Fig. 31.



Setzen wir nun, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, voraus, dass beide Spulen ähnlich gewickelt sind und dass die Grösse und Richtung der magnetischen Kraft in beiden Electromagneten dieselbe ist, etwa von oben nach unten, wie dies in der Fig. 30 durch Pfeile angedeutet ist. Bei einer Verschiebung des beweglichen Systems parallel zu  $AB$  von links nach rechts tritt die Spule  $B$  in das Feld  $M_2$  hinein und die Spule  $A$  eben so viel aus dem Felde  $M_1$  heraus. Folglich werden die inducirten Ströme die Galvanometerwindungen in entgegengesetzter Richtung durchfliessen und sich gegenseitig aufheben. Die Galvanometernadel wird also keinen Ausschlag geben. Durch Regulieren der Widerstände beider Stromkreise und der Stromstärke in den Electromagneten lässt sich eine vollständige Compensation leicht erzielen.

Dreht sich aber das Instrument um die Axe  $OC$ , so werden, wie aus den Figuren leicht ersichtlich ist, beide inducirte Ströme in derselben Rich-

tung durch das Galvanometer fließen und sich gegenseitig verstärken; die Galvanometernadel bekommt also einen Ausschlag, wobei durch Vermehrung der Stromstärke in den Electromagneten die Empfindlichkeit der Registrierung zwischen sehr weiten Grenzen gesteigert werden kann.

In dieser einfachen Weise lassen sich also die Verschiebungen des Instruments bei der Registrierung völlig eliminieren und nur die Drehungen desselben sich wirksam machen.

Will man eine völlig symmetrische Aufstellung haben, so empfiehlt es sich statt zweier Spulen zwei Paar Spulen anzuwenden — auf jeder Seite ein Paar. Es lassen sich ohne Schwierigkeit dieselben mit einander und mit dem Galvanometer so verbinden, dass nur bei Drehungen des Apparates um die Axe  $OC$  Ströme durch die Galvanometerwindungen fließen, während bei Verschiebungen parallel zu  $AB$  und auch senkrecht zu dieser Richtung die inducirten Ströme sich genau aufheben. Ist die Compensation bei Verschiebungen in zwei zu einander senkrechten Richtungen erzielt, so werden die Ströme bei einer Verschiebung des Apparates in jedem beliebigen Azimut sich ebenfalls compensieren.

Zum Zweck der Erleichterung der Manipulationen mit dieser Vorrichtung habe ich auch ein besonderes Schaltbrett construiren lassen.

Diese ganze electromagnetische Aufstellung habe ich einer experimentellen Prüfung unterzogen, wobei dieselbe in äusserst befriedigender Weise sich bewährt hat.

Die hier beschriebene electromagnetische Vorrichtung bietet also die Möglichkeit, den Davison'schen Apparat vollständig frei zu lassen. Alle Verschiebungen desselben werden dabei ganz fortfallen und nur die Drehungen, welche bei Neigungsbeobachtungen von Belang sind, werden allein registriert, wobei die früher erwähnten Nachtheile der gewöhnlichen optischen Spiegelregistrierung vollständig fortfallen.

## § 5.

### Theorie der Bewegung des freien Davison'schen Apparates bei ruhender Unterlage.

Durch die eben beschriebene Vorrichtung schien mir zuerst die Aufgabe der Registrierung von Neigungen gelöst. Es traten aber neue und sehr erhebliche Schwierigkeiten auf, die die Lösung des Problems sehr aufgeschoben haben.

Es ist ja wahr, dass dank dieser electromagnetischen Vorrichtung die Längsverschiebungen des Davison'schen Apparates überhaupt nicht mehr registriert werden, da aber diese Verschiebungen bei einem freien Apparat, die eine Art Pendel darstellt, bei Verschiebungen und Neigungen der Unterlage immer vorhanden sind, so fragt es sich, ob diese Verschiebungen ihrerseits nicht eine secundäre Drehung des Systems hervorrufen, ganz unabhängig von der Drehung desselben in Folge der Neigung der Unterlage  $\psi$ .

Diese etwaige secundäre Drehung bei Verschiebungen des Apparates dachte ich in folgender Weise eliminieren zu können.

Es ist einleuchtend, dass beim Davison'schen Apparat, wenn er eine sehr kleine Drehung erfährt, dieselbe um eine Axe erfolgt, die parallel zu den Drähten  $AC$  und  $BD$  (siehe die Figur 29) ist und zwischen den Befestigungspunkten  $A$  und  $B$  beider Drähte hindurchgeht. Gelingt es durch Auflegen von Seitengewichten den Schwerpunkt des Systems in die Richtung dieser momentanen Drehungsaxe zu bringen, so kann offenbar bei einer Verschiebung keine Drehung stattfinden, dabei können auch selbstverständlich beide Drähte nicht gleich gespannt werden.

Alle Versuche, dies zu erzielen, sind vollkommen gescheitert; es trat immer bei einer Verschiebung (bei Schwingungen) des Apparates, bei vollkommen horizontaler Stellung der Unterlage, eine Drehung ein, die überhaupt nicht zu eliminieren war.

Diese Unannehmlichkeit veranlasste mich, ein ganz vereinfachtes Modell eines Davison'schen Apparates bauen zu lassen, um die Gesetze der Bewegung desselben möglichst vollständig zu studieren.

Eines von diesen Modellen ist auf der schematischen Fig. 32 dargestellt.

Dasselbe besteht aus zwei Drähten  $a$  und  $b$  ungleicher Länge. Zwischen den unteren Befestigungspunkten  $A$  und  $B$  beider Drähte befindet sich ein kleiner, in Millimeter getheilter Messingstab, welcher ein cylindrisches, centrisch aufgesetztes Laufgewicht  $M$  trägt.

Das andere Modell (siehe die Fig. 33) unterscheidet sich von dem ersten nur dadurch, dass die Befestigungspunkte  $A$  und  $B$  der Drähte näher an einander liegen und der Messingstab statt eines Laufgewichts solcher zwei ( $M_1$  und  $M_2$ ) trägt, die ausserdem ausserhalb der Punkte  $A$  und  $B$  sich befinden.

Beide Modelle wurden mit Hilfe der beweglichen Plattform untersucht. Sie wurden nämlich auf derselben aufgestellt und zwar so, dass die Ebene der Drähte senkrecht zur Richtung ( $x$ ) der Plattformbewegung war. Man setzte alsdann, um den Apparaten einen Anstoss zu geben, die Plattform für einige Secunden in Bewegung (Längsverschiebungen) und beobachtete die

Bewegung dieser Pendel bei den verschiedensten Stellungen der Laufgewichte.

Anstatt die Plattform in Anwendung zu bringen, konnte man einfach diese Modelle mit den Händen aus ihrer Ruhelage parallel der  $x$ -Axe entfernen und alsdann sich selbst überlassen.

Fig. 32.

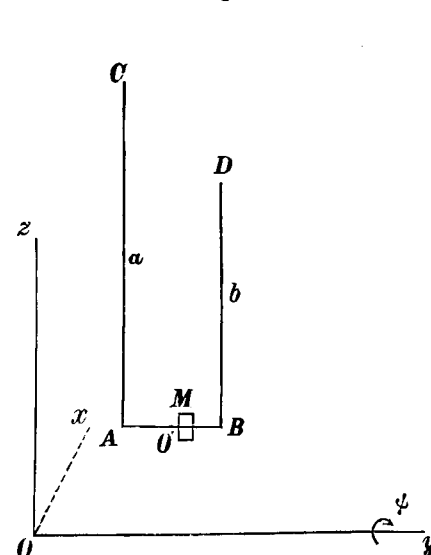
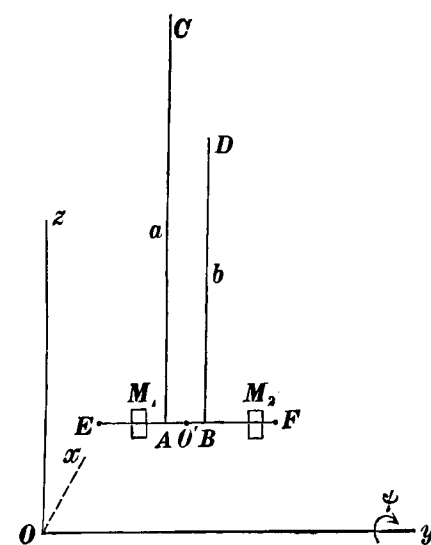


Fig. 33.



Es gelang dabei nie eine solche Stellung der Gewichte zu finden, bei welcher die Schwingungen parallel der  $x$ -Axe nicht von einer Drehung begleitet wurden, d. h. mit anderen Worten, dass es überhaupt nicht möglich war den Schwerpunkt des Systems in die momentane Drehungsaxe zu bringen.

Dieses interessante, wenn auch zum Zweck des Studiums von Neigungen sehr trostlose Resultat veranlasste mich, die Theorie des Davison'schen Apparates zu entwickeln, um den beobachteten Thatsachen eine theoretische Begründung zu geben.

Diese Theorie möge nun hier folgen.

Der Einfachheit wegen werde ich hier voraussetzen, dass alle Massen symmetrisch um die Axe  $AB$  vertheilt sind, um Drehungen um dieselbe nicht berücksichtigen zu brauchen. Ist das nicht der Fall, so lässt sich die weiter zu entwickelnde Theorie leicht in dieser Richtung vervollständigen; mir kam es aber wesentlich darauf an, die Theorie derjenigen Apparate, mit welchen die Versuche in der That ausgeführt worden sind und bei welchen die Massen wirklich symmetrisch um die  $AB$ -Axe vertheilt waren, näher zu erörtern.

Denken wir uns nun einen solchen vereinfachten Davison'schen Apparat, wie dies auf der schematischen Fig. 34 angedeutet ist.

Die Länge der Drähte sei resp.  $a$  und  $b$ , wobei  $a > b$  ist; die Entfernung derselben sei  $2\delta$ .

$O'$  sei die Mitte der Strecke  $AB$ .

Die Koordinaten dieses Punktes seien resp.  $o$ ,  $D$  und  $s$ .

In  $G$ , in einer Entfernung  $\Delta$  von  $O'$ , befinde sich der Schwerpunkt dieses beweglichen Systems. Das Gesamtgewicht desselben sei  $P$ .  $O''$  sei der Schnittpunkt der wirklichen Drehungsaxe des Systems mit der Linie  $AB$ .

Die Entfernung  $O'O''$  sei  $\rho$ .

Fig. 34.

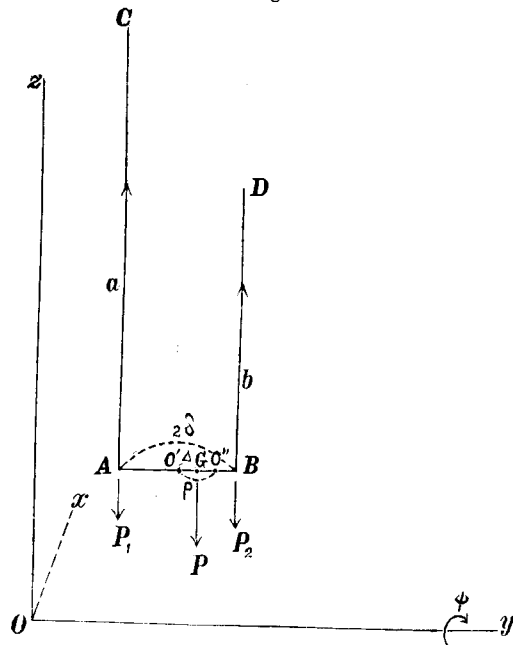
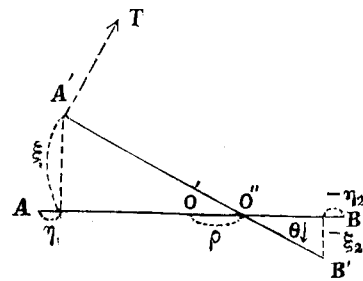


Fig. 35.



Befindet sich der Schwerpunkt in  $G$ , so berechnet sich die Spannung  $P_1$  und  $P_2$  beider Drähte aus folgenden Formeln:

$$P_1 = \frac{\delta - \Delta}{2\delta} P \dots \dots \dots (77)$$

$$P_2 = \frac{\delta + \Delta}{2\delta} P, \dots \dots \dots (78)$$

$$P = P_1 + P_2 \dots \dots \dots (79)$$

wo  
ist.

Setzen wir nun voraus, dass der Apparat in sehr kleine Schwingungen parallel der  $x$ -Axe versetzt ist. Diese Schwingungen sind von Drehungen um eine der  $z$ -Axe parallele Axe, die durch  $O''$  hindurchgeht, begleitet.

Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte  $C$  und  $D$ , so wie auch diejenigen von  $A$  und  $B$  in folgender Weise.

Koordinaten.

$$C \begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = D - \delta \\ Z_1 = s + a \end{cases} \dots \dots (80) \quad D \begin{cases} X_2 = 0 \\ Y_2 = D + \delta \\ Z_2 = s + b. \end{cases} \dots \dots (81)$$

Verbleibt die Unterlage in Ruhe, so bleiben diese Koordinaten unverändert.

Was nun die Koordinaten von  $A$  und  $B$  anbelangt, so sind sie für den ruhenden Apparat die folgenden:

$$A \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = D - \delta \\ z_1 = s \end{cases} \quad B \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = D + \delta \\ z_2 = s. \end{cases}$$

Nach erfolgter Bewegung des Apparates wollen wir die Koordinaten dieser Punkte ( $A'$  und  $B'$ ) zur Zeit  $t$  in folgender Weise bezeichnen (siehe die Fig. 35):

$$A' \begin{cases} x'_1 = \xi_1 \\ y'_1 = D - \delta + \eta_1 \\ z'_1 = s + \zeta_1 \end{cases} \dots \dots (82) \quad B' \begin{cases} x'_2 = \xi_2 \\ y'_2 = D + \delta + \eta_2 \\ z'_2 = s + \zeta_2. \end{cases} \dots \dots (83)$$

Die Bedingungen, dass die Entfernungen zwischen  $A'$  und  $C$ ,  $B'$  und  $D$ , so wie zwischen  $A'$  und  $B'$  unverändert und zwar resp. gleich  $a$ ,  $b$  und  $2\delta$  bleiben, führen zu folgenden drei Bedingungsgleichungen:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - 2a\zeta_1 = 0 \dots \dots \dots (84)$$

$$\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - 2b\zeta_2 = 0 \dots \dots \dots (85)$$

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 - 4\delta(\eta_1 - \eta_2) = 0. \dots (86)$$

$\xi_1$  und  $\xi_2$  sind als sehr kleine Größen erster Ordnung zu betrachten. Bei Verschiebungen parallel der  $x$ -Axe werden  $\eta_1$  und  $\eta_2$  kleine Größen höherer Ordnung sein. Aus den Gleichungen (84) und (85) lässt sich folgern,



dass die übrigen Grössen  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  ebenfalls kleine Grössen höherer Ordnung sind, was auch ohne Weiteres verständlich ist.

Bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung ergibt sich also sofort

$$\zeta_1 = \frac{1}{2a} \xi_1^2 \dots \dots \dots (87)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2b} \xi_2^2 \dots \dots \dots (88)$$

Wollen wir nun die Lage der momentanen Drehungsaxe aufsuchen.

Bezeichnen wir durch  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel, welche die Richtung  $A'B'$  mit den Coordinatenachsen bildet.

Es ergibt sich leicht in ähnlicher Weise, wie früher im § 3, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \\ \cos \beta &= 1 \\ \cos \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (89)$$

Seien ferner  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  die Winkel, welche die Richtung  $A'C$ , und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  die Winkel, welche  $B'D$  mit den Coordinatenachsen bildet.

Es folgt ohne Schwierigkeit in ähnlicher Weise wie früher, wiederum bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung (siehe die Formeln (62) und (63))

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= -\frac{\xi_1}{a} \\ \cos \beta_1 &= -\frac{\eta_1}{a} \\ \cos \gamma_1 &= 1. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (90)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_2 &= -\frac{\xi_2}{b} \\ \cos \beta_2 &= -\frac{\eta_2}{b} \\ \cos \gamma_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (91)$$

Sei nun  $T$  (siehe die Fig. 35) eine Richtung, welche senkrecht zu der  $z$ -Axe und zu  $A'B'$  ist und nach der Seite der positiven  $x$  gerichtet ist. Bilde nun diese Richtung  $T$  die Winkel  $\lambda, \mu$  und  $\nu$  mit den Coordinatenachsen.

Es ergibt sich sofort

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= 1 \\ \cos \mu &= -\frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \\ \cos \nu &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (92)$$

Denken wir uns nun allein eine Drehung vorhanden, wobei wir den Drehungswinkel  $\theta$  positiv annehmen wollen, wenn die Richtung  $A'B'$  die Lage bekommt, welche auf der Fig. 35 angedeutet ist.

Beim Gleichgewicht muss dabei die Summe der Projectionen der Spannung der Drähte auf die  $T$ -Richtung gleich Null sein.

Es muss also sein

$$P_1 [\cos \alpha_1 \cos \lambda + \cos \beta_1 \cos \mu + \cos \gamma_1 \cos \nu] + \\ + P_2 [\cos \alpha_2 \cos \lambda + \cos \beta_2 \cos \mu + \cos \gamma_2 \cos \nu] = 0,$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (90), (91) und (92),

$$P_1 \frac{\xi_1}{a} + P_2 \frac{\xi_2}{b} = 0. \dots \dots \dots (93)$$

Die Lage der momentanen Drehungsaxe lässt sich aus der Figur 35 leicht ermitteln.

Es muss sein

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\xi_1}{\delta + \rho - \eta_1} = \frac{-\xi_2}{\delta - \rho + \eta_2},$$

oder, bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung,

$$\theta = \frac{\xi_1}{\delta + \rho} = \frac{-\xi_2}{\delta - \rho}. \dots \dots \dots (94)$$

Daraus folgt für  $\rho$

$$\rho = \delta \frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_1 - \xi_2},$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichung (93),

$$\rho = \delta \frac{aP_2 - bP_1}{aP_2 + bP_1}. \dots \dots \dots (95)$$

Wollen wir nun das Drehungsmoment  $\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$  unseres bifilaren Systems berechnen; hierin bedeutet  $dV$  die Arbeit der Kräfte, wenn  $\theta$  um  $d\theta$  vermehrt wird.

Es ergibt sich, wie leicht einzusehen ist,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) &= + P_1 [\cos \alpha_1 \cos \lambda + \cos \beta_1 \cos \mu + \cos \gamma_1 \cos \nu] [\delta + \rho] \\ &\quad - P_2 [\cos \alpha_2 \cos \lambda + \cos \beta_2 \cos \mu + \cos \gamma_2 \cos \nu] [\delta - \rho], \end{aligned}$$

also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = - \left[ P_1 \frac{\xi_1}{a} (\delta + \rho) - P_2 \frac{\xi_2}{b} (\delta - \rho) \right],$$

oder, unter Berücksichtigung der Beziehungen (94),

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = - \left[ \frac{P_1}{a} (\delta + \rho)^2 + \frac{P_2}{b} (\delta - \rho)^2 \right] \theta. \dots\dots\dots(96)$$

$\delta + \rho$  und  $\delta - \rho$  lassen sich aus der Gleichung (95) sofort ermitteln.

Es wird nämlich:

$$\delta + \rho = \delta \frac{2aP_2}{aP_2 + bP_1} \dots\dots\dots(97)$$

$$\delta - \rho = \delta \frac{2bP_1}{aP_2 + bP_1} \dots\dots\dots(98)$$

Bringen wir diese Werthe in die Formel (96) ein, so verwandelt sich diese, wenn wir durch  $D$  die Drehungsconstante des Systems bezeichnen, in  $\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = - D\theta$ , wo

$$D = \frac{4P_1P_2}{aP_2 + bP_1} \cdot \delta^2 \dots\dots\dots(99)$$

ist.

Zu dieser Formel kann man auf einem anderen Wege gelangen.

Bezeichnen wir durch  $\zeta$  die Erhebung des Schwerpunktes des Systems, dann ist

$$\zeta = \frac{P_1 \zeta_1 + P_2 \zeta_2}{P},$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (87), (88) und (94),

$$\zeta = \frac{1}{2P} \left[ \frac{P_1}{a} (\delta + \rho)^2 + \frac{P_2}{b} (\delta - \rho)^2 \right] \cdot \theta^2,$$

oder

$$\zeta = \frac{2P_1P_2}{(aP_2 + bP_1)} \cdot \frac{\delta^2}{P} \cdot \theta^2. \dots\dots\dots(100)$$

Die gesuchte Drehungsconstante  $D$  berechnet sich bekanntlich aus der Beziehung

$$Pd\zeta = D\theta d\theta.$$

Aus der Gleichung (100) ergibt sich auch unmittelbar

$$D = \frac{4P_1P_2}{aP_2 + bP_1} \delta^2,$$

also der früher gefundene Ausdruck.

Sind die Drähte gleich lang und  $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$ , so wird

$$D = \frac{P}{a} \delta^2;$$

das ist der bekannte Ausdruck für das gewöhnliche Bifilar.

Setzen wir nun jetzt voraus, dass unser Apparat ausser einer Drehung  $\theta$  noch eine Verschiebung parallel der  $x$ -Axe erfährt, und sei  $\xi$  die Verschiebung des Punktes  $O''$  (siehe die Fig. 36).

Fig. 36

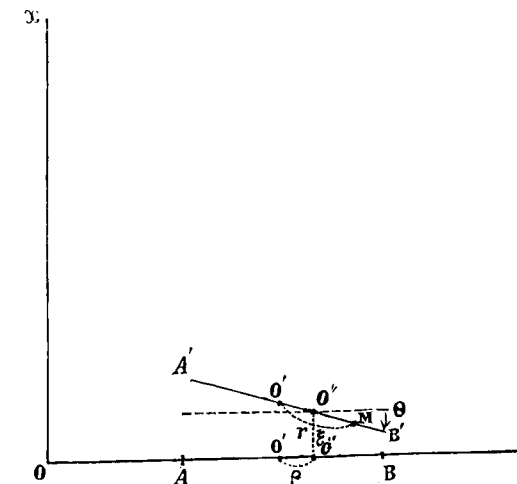
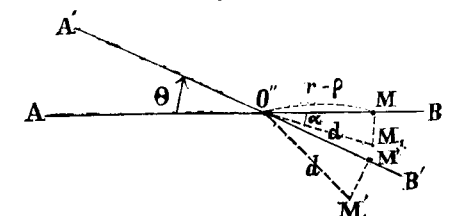


Fig. 37.



Wir werden jetzt nur die Verschiebungen parallel der  $x$ -Axe in Betracht ziehen, da nur diese hier von Belang sind.

Nehmen wir irgend einen Punkt  $M$  auf der Strecke  $A'B'$  in einer Entfernung  $r$  von der Mitte  $O'$  an, so wird die entsprechende Coordinate  $x$  dieses Punktes sich in folgender Weise ausdrücken

$$x = \xi - (r - \rho) \theta. \dots\dots\dots(101)$$

Wir haben hier vorausgesetzt, dass der Punkt  $M$  sich gerade auf der Linie  $A'B'$  befindet.

Wollen wir nun den allgemeineren Fall betrachten, wo unser beweglicher Punkt sich nicht in  $M$ , sondern in  $M_1$  befindet, d. h. in einer Ebene, welche senkrecht zu  $AB$  ist und durch  $M$  hindurchgeht.

Sei  $d$  die Entfernung von  $M_1$  von der Drehungsaxe  $O''$ .

Nach erfolgter Drehung verschiebt sich  $M$  nach  $M'$  und  $M_1$  nach  $M_1'$ .

Bezeichnen wir den Winkel  $MO''M_1$  mit  $\alpha$ , so lassen sich die Coordinaten  $x$  und  $y$  unseres beweglichen Punktes  $M_1'$  folgendermaassen ausdrücken<sup>1)</sup> (siehe die Fig. 37):

$$x = \xi - d \sin(\alpha + \theta)$$

$$y = y_0 + d \cos(\alpha + \theta),$$

wo  $y_0$  die entsprechende Coordinate von  $O''$  bedeutet.

Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung findet man

$$x = \xi - d \sin \alpha - d \cos \alpha \cdot \theta$$

$$y = y_0 + d \cos \alpha - d \sin \alpha \cdot \theta.$$

Die absolute Geschwindigkeit unseres beweglichen Punktes sei  $v$ .

Es wird nun

$$v^2 = [\xi' - d \cos \alpha \theta']^2 + [d \sin \alpha \theta']^2$$

$$= \xi'^2 + d^2 \theta'^2 - 2\xi' (r - \rho) \theta'.$$

Die lebendige Kraft  $T$  unseres Systems berechnet sich folgendermaassen:

$$T = \frac{1}{2} [\xi'^2 \Sigma m + \theta'^2 \Sigma m d^2 - 2\xi' \theta' \Sigma m (r - \rho)].$$
<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Die dritte Coordinate  $z$  kann als unveränderlich betrachtet werden.

<sup>2)</sup> Es wäre eigentlich eine kleine Correction in diesem Ausdruck hinzuzufügen für diejenigen Massenpunkte, welche höher oder niedriger als  $A'B'$  liegen, aber der Einfachheit wegen können wir voraussetzen, dass alle Massen in der Ebene  $AB A'B'$  concentrirt sind, ähnlich wie man ein physisches Pendel durch ein mathematisches ersetzt.

Nun ist

$$\Sigma m = \frac{P}{g};$$

$$\Sigma m d^2 = K$$

das Trägheitsmoment inbezug auf die Axe  $O''$ .

Was nun  $\Sigma m (r - \rho)$  anbelangt, so ist ohne Weiteres

$$\Sigma m (r - \rho) = \frac{P}{g} (\Delta - \rho).$$

Setzen wir diese Werthe in dem Ausdrücke für  $T$  ein, so folgt

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \xi'^2 + \frac{1}{2} K \theta'^2 + \frac{P}{g} (\rho - \Delta) \xi' \theta'. \dots\dots\dots (102)$$

Wollen wir nun die Arbeit  $dV$  der Kräfte bestimmen, welche wirken, wenn  $\xi$  um  $d\xi$  vermehrt wird.

Es ist nämlich die Arbeit der Spannung der Drähte

$$dV = [P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2] d\xi,$$

oder, nach den Formeln (90) und (91),

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) = -P_1 \frac{\xi_1}{a} - P_2 \frac{\xi_2}{b}. \dots\dots\dots (103)$$

Aus der Fig. 36 und der Formel (101) ist nun ersichtlich:

$$\xi_1 = \xi + (\delta + \rho) \theta, \dots\dots\dots (104)$$

$$\xi_2 = \xi - (\delta - \rho) \theta. \dots\dots\dots (105)$$

Setzen wir diese Werthe in die Formel (103) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Beziehungen (97) und (98)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) = -\left[\frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b}\right] \xi. \dots\dots\dots (106)$$

Wollen wir nun den Werth des Drehungsmoments  $\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$  aufsuchen.

Der früher gefundene Ausdruck für diese Grösse (siehe Formel (96)) bezog sich auf den Fall, wo der Apparat nur eine Drehung und keine Verschiebung erfahren hat.

Jetzt müssen wir aber auch die Verschiebung  $\xi$  des Punktes  $O''$  mitberücksichtigen.

Bezugnehmend auf die Fig. 34 und 35 und die früher abgeleiteten Formeln, erhält man ohne Schwierigkeit folgenden Ausdruck, wenn man die Spannung  $P_1$  auf die Richtung  $T$  und  $P_2$  auf  $-T$  projecirt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = + P_1 [\cos \alpha_1 \cos \lambda + \cos \beta_1 \cos \mu + \cos \gamma_1 \cos \nu] [\delta + \rho] - \\ - P_2 [\cos \alpha_2 \cos \lambda + \cos \beta_2 \cos \mu + \cos \gamma_2 \cos \nu] [\delta - \rho],$$

oder, mit Rücksicht auf die Formeln (90), (91) und (92) und bei Beibehaltung nur von Gliedern niedrigster Ordnung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = - \left[ P_1 \frac{\xi_1}{a} (\delta + \rho) - P_2 \frac{\xi_2}{b} (\delta - \rho) \right].$$

Bringt man in diese Formel die Werthe von  $\xi_1$  und  $\xi_2$  aus den Formeln (104) und (105) ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (97), (98) und (99), da die Glieder, welche  $\xi$  als Factor enthalten, sich aufheben,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = - \frac{4P_1 P_2}{aP_2 + bP_1} \delta^2 \theta = - D\theta.$$

Wir erhalten also auch in diesem Fall denselben Ausdruck für  $\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$ , wie früher.

Haben wir also  $T$ ,  $\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)$  und  $\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$  bestimmt, so können wir nun zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen unseres Systems das Lagrange'sche Princip in Anwendung bringen.

Es wird nämlich

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = - D\theta.$$

Also

$$\frac{P}{g} \xi'' + \left[ \frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b} \right] \xi + \frac{P}{g} (\rho - \Delta) \theta'' = 0 \dots \dots \dots (107)$$

$$K\theta'' + D\theta + \frac{P}{g} (\rho - \Delta) \xi'' = 0 \dots \dots \dots (108)$$

Diese Gleichungen zeigen in allerdeutlichster Weise, dass die Verschiebungen ( $\xi$ ) des Apparates einen Einfluss auf die Drehungen ( $\theta$ ) haben und umgekehrt.

Nur unter der Bedingung, dass

$$\rho - \Delta = 0$$

ist, werden die Drehungen vollständig unabhängig von den Verschiebungen sein.

Mit anderen Worten, es muss die momentane Drehungsaxe durch den Schwerpunkt des Systems hindurchgehen.

Aus den Gleichungen (77) und (79) ergibt sich nun

$$\Delta = \delta \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2} \dots \dots \dots (109)$$

$\rho$  ist durch die Gleichung (95) gegeben.

Es folgt also

$$\rho - \Delta = 2\delta \frac{P_1 P_2 (a - b)}{P(aP_2 + bP_1)} \dots \dots \dots (110)$$

Wir sehen also, dass  $\rho - \Delta$  im Allgemeinen von 0 verschieden ist, folglich verursachen die Schwingungen des Apparates eine Drehung desselben, wie die Beobachtungen es thatsächlich gezeigt haben.

Um  $\rho - \Delta = 0$  zu machen, d. h. die Drehungen des Davison'schen Apparates unabhängig von den Verschiebungen desselben zu machen, muss  $a = b$  sein. Dann aber ist der Apparat zu Neigungsbeobachtungen nicht mehr verwendbar.

Es kann aber in einer anderen Weise  $\rho - \Delta$  sehr klein gemacht werden; nämlich braucht man dazu nur  $P_1$  oder  $P_2$  sehr klein zu machen, d. h. den Schwerpunkt des Systems möglichst nahe an einen der beiden Drähte heranzurücken.

Vollständig kann man wohl nicht den störenden Einfluss der Verschiebungen eliminieren, da der Davison'sche Apparat gewissermaassen als eine Combination von einem Vertical- und Horizontalpendel betrachtet werden kann, aber durch passende Verschiebung des Schwerpunktes des Systems kann dieser Einfluss sehr klein gemacht werden.

Wollen wir nun die zwei erhaltenen Differentialgleichungen (107) und (108), welche die Bewegung unseres Apparates beherrschen, etwas näher betrachten.

Der Einfachheit wegen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b}}{P} \cdot g = n^2 \dots\dots\dots(111)$$

$$\rho - \Delta = 2\delta \frac{P_1 P_2 (a-b)}{P(aP_2 + bP_1)} = \alpha \dots\dots\dots(112)$$

$$\frac{D}{K} = n_1^2 \dots\dots\dots(113)$$

$$\frac{P}{gK} (\rho - \Delta) = \alpha_1 \cdot ^1) \dots\dots\dots(114)$$

Dann wird

$$\xi'' + n^2 \xi + \alpha \theta'' = 0 \dots\dots\dots(115)$$

$$\theta'' + n_1^2 \theta + \alpha_1 \xi'' = 0. \dots\dots\dots(116)$$

Wäre  $\alpha$  gleich Null, so würde unser System wie ein einfaches Verticalpendel schwingen, dessen Periode

$$\tau = \frac{2\pi}{n} \dots\dots\dots(117)$$

wird.

Die Länge des entsprechenden Pendels kann man in folgender Weise berechnen:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \frac{1}{n},$$

also, nach der Gleichung (111),

$$l = \frac{abP}{aP_2 + bP_1} \dots\dots\dots(118)$$

Ist  $a = b$ , so wird  $l = a$  sein.

Für  $P_2 = 0$  ist  $l = a$ ;

»  $P_1 = 0$  »  $l = b$ ;

»  $P_1 = P_2$  »  $l = \frac{2ab}{a+b}$ .

Wäre  $\alpha_1 = 0$ , so würde die Drehung des Apparates mit einer Periode

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{n_1} \dots\dots\dots(119)$$

erfolgen.

<sup>1)</sup>  $\alpha_1$  hat die Dimensionen  $L^{-1}$ , wo  $L$  eine Länge bedeutet.  $\alpha$  hat die Dimensionen  $L$ , also ist  $\alpha \alpha_1$  eine reine Zahl.

In Wirklichkeit aber, da zwischen diesen schwingenden und drehenden Bewegungen eine gegenseitige Einwirkung besteht, werden die Perioden  $T$  und  $T_1$  derselben etwas anders ausfallen.

Wollen wir nun die Gesetze dieser Bewegungen etwas näher untersuchen.

Es handelt sich dabei darum, unser System von zwei simultanen Differentialgleichungen zu integrieren.

Setzen wir  $\theta''$  aus der Gleichung (116) in die Gleichung (115) ein, so folgt

$$(1 - \alpha \alpha_1) \xi'' + n^2 \xi = \alpha n_1^2 \theta.$$

Durch zweimaliges Differentieren nach der Zeit  $t$  bekommen wir

$$\alpha \theta'' = \frac{1}{n_1^2} [ \{ 1 - \alpha \alpha_1 \} \xi'''' + n^2 \xi''] .$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (115) ein, so ergibt sich

$$(1 - \alpha \alpha_1) \xi'''' + (n^2 + n_1^2) \xi'' + n^2 n_1^2 \xi = 0. \dots\dots\dots(120)$$

Hätte man  $\xi$  statt  $\theta$  aus den simultanen Differentialgleichungen eliminieren wollen, so würde man genau dieselbe Differentialgleichung für  $\theta$  finden, nämlich

$$(1 - \alpha \alpha_1) \theta'''' + (n^2 + n_1^2) \theta'' + n^2 n_1^2 \theta = 0. \dots\dots\dots(121)$$

Wir sehen also, dass beide Bewegungen ( $\xi$  und  $\theta$ ) genau derselben Differentialgleichung entsprechen; wir brauchen also nur eine von diesen Bewegungen zu untersuchen.

Setzen wir der Einfachheit wegen

$$\omega^2 = \alpha \alpha_1 = \frac{P}{gK} (\rho - \Delta)^2, \dots\dots\dots(122)$$

wo  $\omega^2$  immer positiv wird.

Zum Integrieren der Gleichung (120) setzen wir

$$\xi = e^{\mu t},$$

dann erhalten wir

$$\mu^4 + \frac{n^2 + n_1^2}{1 - \omega^2} \mu^2 + \frac{n^2 n_1^2}{1 - \omega^2} = 0. \dots\dots\dots(123)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\mu^2 = -\frac{1}{2(1 - \omega^2)} [(n^2 + n_1^2) \mp \sqrt{(n_1^2 - n^2)^2 + 4n^2 n_1^2 \omega^2}].$$

Setzen wir ferner

$$\nu^2 = \frac{1}{2(1-\omega^2)} [(n^2 + n_1^2) - \sqrt{(n_1^2 - n^2)^2 + 4n^2 n_1^2 \omega^2}]. \dots (124)$$

$$\nu_1^2 = \frac{1}{2(1-\omega^2)} [(n^2 + n_1^2) + \sqrt{(n_1^2 - n^2)^2 + 4n^2 n_1^2 \omega^2}]. \dots (125)$$

Die Integrale unserer Differentialgleichungen (120) und (121) nehmen die folgende Form an:

$$\xi = A \cos \nu t + B \sin \nu t + C \cos \nu_1 t + D \sin \nu_1 t. \dots (126)$$

$$\theta = A_1 \cos \nu t + B_1 \sin \nu t + C_1 \cos \nu_1 t + D_1 \sin \nu_1 t. \dots (127)$$

Die Coefficienten vor den trigonometrischen Functionen sind Integrationsconstanten, welche unmittelbar von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen.

Wir sehen also, dass jede dieser beiden Bewegungen eine doppelt-periodische ist, mit denselben Perioden

$$T = \frac{2\pi}{\nu} \dots (128)$$

und

$$T_1 = \frac{2\pi}{\nu_1} \dots (129)$$

Ehe wir mit dieser Untersuchung weiter fortschreiten, wollen wir uns zuerst überzeugen, ob  $\nu$  und  $\nu_1$  immer reell sind.

Bezeichnen wir die in den vorigen Ausdrücken für  $\nu^2$  und  $\nu_1^2$  vorkommende Wurzel durch  $R$ , also

$$R = + \sqrt{(n_1^2 - n^2)^2 + 4n^2 n_1^2 \omega^2}. \dots (130)$$

Da  $\omega^2$  immer positiv ist, so wird  $R$  immer reell.

Wollen wir nun sehen, unter welcher Bedingung

$$R < n^2 + n_1^2$$

wird.

Diese Bedingung fordert, dass

$$\omega^2 < 1$$

ist.

Ist also  $\omega^2 < 1$ , so wird, wie aus den Gleichungen (124) und (125) ersichtlich ist,  $\nu$  und  $\nu_1$  immer reell.

Der Beweis, dass  $\omega^2 < 1$  ist, lässt sich folgendermaassen liefern.

Nach der Formel (122) muss also bewiesen werden, dass immer

$$P(\rho - \Delta)^2 < gK \dots (131)$$

wird.

$K$  ist das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf die Drehungsaxe, welche durch  $O''$  hindurchgeht.

Wären alle Massen auf der Linie  $AB$  (siehe die Fig. 34), welche die unteren Befestigungspunkte  $A$  und  $B$  der Drähte verbindet, vertheilt, so würde das entsprechende Trägheitsmoment  $K'$  kleiner als  $K$  ausfallen.

Lässt sich nun beweisen, dass

$$P(\rho - \Delta)^2 < gK'$$

ist, so wird die Beziehung (131) um so mehr erfüllt.

Zu diesem Zwecke denken wir uns einen Stab von sehr kleinem und überall gleichem Querschnitt  $q$ , welcher mit  $AB$  zusammenfällt, und sei die Massendichtigkeit desselben gleich  $\sigma$ , wo  $\sigma$  eine veränderliche Grösse ist, welche von der Entfernung  $r$  des betrachteten Punktes von der Mitte  $O'$  von  $AB$  unmittelbar abhängt. Also  $\sigma = f(r)$ .

Dann ist

$$K' = q \int_{-c}^{+c} \sigma (r - \rho)^2 dr,$$

wo  $2c$  die ganze Länge des Stabes bedeutet.

Es ergibt sich ohne Weiteres

$$K' = q \int_{-c}^{+c} \sigma r^2 dr - 2\rho q \int_{-c}^{+c} \sigma r dr + q\rho^2 \int_{-c}^{+c} \sigma dr.$$

$$q \int_{-c}^{+c} \sigma dr \text{ ist die ganze Masse des Systems, also } \frac{P}{g} = M;$$

$$q \int_{-c}^{+c} \sigma r dr = \frac{P}{g} \cdot \Delta = M\Delta, \dots (132)$$

wo  $\Delta$  die Entfernung des Schwerpunktes von der Mitte des Stabes  $O'$  darstellt.

Was nun  $q \int_{-c}^{+c} \sigma r^2 dr$  anbetrifft, so bedeutet dasselbe das Trägheitsmoment  $K_0$  des Systems in Bezug auf eine Axe, welche durch die Mitte des Stabes  $O'$  hindurchgeht.

Setzen wir nun

$$K_0 = q \int_{-c}^{+c} \sigma r^2 dr = M r_0^2, \dots\dots\dots(133)$$

so folgt

$$K' = M r_0^2 - M 2\rho \Delta + M \rho^2.$$

Unsere Bedingung

$$P(\rho - \Delta)^2 < gK'$$

führt also zur folgenden Beziehung

$$\Delta^2 < r_0^2. \dots\dots\dots(134)$$

Ist diese Beziehung erfüllt, so wird  $\omega^2 < 1$  sein.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Ungleichung (134) für positive Werthe von  $\sigma$ , welche nur vorkommen können, immer erfüllt wird.

Aus den Gleichungen (132) und (133) folgt

$$\Delta^2 = \frac{1}{M^2} q^2 \cdot \int_{-c}^{+c} \sigma r dr \times \int_{-c}^{+c} \sigma r dr,$$

$$r_0^2 = \frac{q}{M} \int_{-c}^{+c} \sigma r^2 dr$$

und da

$$M = q \int_{-c}^{+c} \sigma dr$$

ist, so verwandelt sich die Beziehung (134) in die folgende:

$$\int_{-c}^{+c} \sigma r dr \times \int_{-c}^{+c} \sigma r dr < \int_{-c}^{+c} \sigma dr \times \int_{-c}^{+c} \sigma r^2 dr, \dots\dots\dots(135)$$

wo  $\sigma$  eine beliebige, stetige Function von  $r$  ist, die aber immer positiv bleiben soll.

Um die Richtigkeit der Beziehung (135) zu beweisen, denken wir unseren Stab in unendlich kleine, gleich lange Strecken  $\Delta r$  getheilt und

bezeichnen die Entfernung der Mitten dieser Strecken von  $O'$  respective durch  $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ .

Die entsprechenden Werthe von  $\sigma$  für positive Werthe von  $r$  seien resp.  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_n$  und für negative  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \dots \sigma'_n$ .

Dann wird

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{+c} \sigma r dr &= \{[\sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \dots + \sigma_n r_n] - [\sigma'_1 r_1 + \sigma'_2 r_2 + \dots + \sigma'_n r_n]\} \Delta r \\ &= \left\{ \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sigma_\mu r_\mu - \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sigma'_\mu r_\mu \right\} \cdot \Delta r. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{-c}^{+c} \sigma r dr \times \int_{-c}^{+c} \sigma r dr = \left[ \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (\sigma_\mu - \sigma'_\mu)^2 r_\mu^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\sigma_\mu - \sigma'_\mu)(\sigma_\nu - \sigma'_\nu) r_\mu r_\nu \right] (\Delta r)^2.$$

In der zweiten Doppelsumme müssen  $\mu$  und  $\nu$  verschieden sein.

Weiter haben wir

$$\int_{-c}^{+c} \sigma r^2 dr = \left[ \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (\sigma_\mu + \sigma'_\mu) r_\mu^2 \right] \Delta r;$$

$$\int_{-c}^{+c} \sigma dr = \left[ \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (\sigma_\mu + \sigma'_\mu) \right] \Delta r,$$

also

$$\int_{-c}^{+c} \sigma dr \times \int_{-c}^{+c} \sigma r^2 dr = \left[ \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (\sigma_\mu + \sigma'_\mu)^2 r_\mu^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\sigma_\mu + \sigma'_\mu)(\sigma_\nu + \sigma'_\nu) r_\mu r_\nu \right] (\Delta r)^2,$$

wo ebenfalls  $\mu \neq \nu$  ist.

Bringen wir nun diese Ausdrücke in die Bedingungsgleichung (135) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &< 4 \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sigma_\mu \sigma'_\mu r_\mu^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \{ \sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma'_\mu \sigma'_\nu \} (r_\mu - r_\nu)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \{ \sigma_\mu \sigma'_\nu + \sigma'_\mu \sigma_\nu \} (r_\mu + r_\nu)^2. \end{aligned}$$

Für positive Werthe von  $\sigma$  wird diese Ungleichung immer erfüllt, folglich wird immer

$$\omega^2 < 1$$

sein.

Nach dieser Abweichung kehren wir wieder zur Betrachtung der Bewegungsgesetze unseres Apparates zurück.

Die beiden Perioden jeder der Bewegungen ( $\xi$  und  $\theta$ ) unseres Instruments werden durch die Gleichungen (128) und (129), resp. (124) und (125) gegeben.

Wollen wir nun den Specialfall betrachten, wo  $\omega^2$  sehr klein und  $n_1$  von  $n$  beträchtlich verschieden ist, und begnügen wir uns dabei mit Gliedern erster Ordnung in Bezug auf  $\omega^2$ .

Man findet ohne Schwierigkeit aus den eben erwähnten Formeln folgende Gleichungen:

$$v = n \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{n^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right], \dots\dots\dots(136)$$

$$v_1 = n_1 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{n_1^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right], \dots\dots\dots(137)$$

und weiter, wegen der Beziehungen (117) und (119),

$$T = \tau \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right], \dots\dots\dots(138)$$

$$T_1 = \tau_1 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{n_1^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right]. \dots\dots\dots(139)$$

Wir sehen also, dass die Eigenperioden jeder einzelnen Bewegung durch das gegenseitige Beeinflussen eine Aenderung erfahren, ausserdem besitzt noch, wie wir schon wissen, in diesem Fall jede Bewegung zwei Perioden, nämlich  $T$  und  $T_1$ .

Wollen wir noch folgenden Grenzfall betrachten, wo

$$n = n_1$$

ist, wobei wir keine Voraussetzung über die Grössenordnung von  $\omega^2$  machen werden.

Man findet leicht in diesem Falle

$$v = \frac{n}{\sqrt{1 + \omega}} \dots\dots\dots(140)$$

$$v_1 = \frac{n}{\sqrt{1 - \omega}}, \dots\dots\dots(141)$$

also

$$T = \tau \sqrt{1 + \omega} \dots\dots\dots(142)$$

$$T_1 = \tau_1 \sqrt{1 - \omega}. \dots\dots\dots(143)$$

Die Gesetze dieser interessanten Bewegungen sind nun durch die früher gegebenen Gleichungen festgestellt.

Wir haben auch gesehen, dass wegen der Wechselwirkung beider Bewegungen jede derselben schon zwei Perioden  $T$  und  $T_1$  besitzt.

Um den Charakter dieser Wechselwirkung anschaulicher zu machen, ist es zweckmässig die Eigenschaften dieser Bewegungen etwas näher zu verfolgen und dementsprechend die Integrationsconstanten in den Gleichungen (126) und (127) zu bestimmen.

Wollen wir zu diesem Zweck zwei besondere Voraussetzungen machen.

#### Erste Voraussetzung.

Am Anfang der Bewegung sei der Apparat in Ruhe, dann werde er um den Winkel  $\theta_0$  gedreht und alsdann sich selbst überlassen.

Dementsprechend muss man setzen

$$\text{für } t = 0 \quad \xi = 0 \quad \xi' = 0 \quad \theta = \theta_0 \quad \theta' = 0.$$

Aus diesen Bedingungen lassen sich nun die 8 Constanten in den Gleichungen (126) und (127) bestimmen.

Dies geschieht auf folgende Weise.

Ersetzt man  $\theta''$  in der Gleichung (115) durch seinen Werth aus der Gleichung (116), so folgt

$$(1 - \omega^2) \xi'' + n^2 \xi = \alpha n_1^2 \theta.$$

In ganz ähnlicher Weise finden wir

$$(1 - \omega^2) \theta'' + n_1^2 \theta = \alpha_1 n^2 \xi.$$

Auf Grund dieser Gleichungen und den gegebenen Anfangsbedingungen hat man für

$$t = 0$$

$$\begin{array}{ll} \xi = 0 & \theta = \theta_0 \\ \xi' = 0 & \theta' = 0 \\ \xi'' = \frac{\alpha n_1^2}{1 - \omega^2} \theta_0 & \theta'' = -\frac{n_1^2}{1 - \omega^2} \theta_0 \\ \xi''' = 0 & \theta''' = 0. \end{array}$$



Differentiert man die allgemeinen Ausdrücke für  $\xi$  und  $\theta$  dreimal nach einander und setzt dann  $t=0$ , so erhält man zur Bestimmung der gesuchten Constanten folgende 8 Gleichungen:

$$0 = A + C$$

$$0 = \nu B + \nu_1 D$$

$$\frac{\alpha n_1^2}{1-\omega^2} \theta_0 = -\nu^2 A - \nu_1^2 C$$

$$0 = -\nu^3 B - \nu_1^3 D$$

$$\theta_0 = A_1 + C_1$$

$$0 = \nu B_1 + \nu_1 D_1$$

$$-\frac{n_1^2}{1-\omega^2} \theta_0 = -\nu^2 A_1 - \nu_1^2 C_1$$

$$0 = -\nu^3 B_1 - \nu_1^3 D_1.$$

Man findet daraus, da  $\nu$  und  $\nu_1$  verschieden sind,<sup>1)</sup>

$$A = \frac{1}{\nu_1^2 - \nu^2} \cdot \frac{\alpha n_1^2}{1-\omega^2} \theta_0 = \frac{\alpha n_1^2}{R} \theta_0$$

$$B = 0$$

$$C = -\frac{1}{\nu_1^2 - \nu^2} \frac{\alpha n_1^2}{1-\omega^2} \theta_0 = -\frac{\alpha n_1^2}{R} \theta_0$$

$$D = 0$$

$$A_1 = -\frac{n_1^2 - n^2 - R}{2R} \theta_0$$

$$B_1 = 0$$

$$C_1 = \frac{n_1^2 - n^2 + R}{2R} \theta_0$$

$$D_1 = 0.$$

<sup>1)</sup> Siehe die Gleichungen (124), (125) und (130).

Wir erhalten also folgende zwei Ausdrücke für  $\xi$  und  $\theta$ :

$$\xi = \frac{\alpha n_1^2}{R} \theta_0 \{ \cos \nu t - \cos \nu_1 t \} \dots \dots \dots (144)$$

und

$$\theta = \theta_0 \left[ \frac{n_1^2 - n^2 + R}{2R} \cos \nu_1 t - \frac{n_1^2 - n^2 - R}{2R} \cos \nu t \right] \dots \dots (145)$$

Dies sind die allgemeinen Ausdrücke für  $\xi$  und  $\theta$  unter den vorausgesetzten Bedingungen.

Wollen wir jetzt specielle Annahmen machen.

**Erste Annahme.**  $\omega^2$  sehr klein und  $n_1$  von  $n$  verschieden.

In diesem Fall haben wir

$$R = (n_1^2 - n^2) \left[ 1 + \frac{2n^2 n_1^2}{(n_1^2 - n^2)^2} \cdot \omega^2 \right].$$

Setzen wir

$$\beta = \frac{n^2 n_1^2}{(n_1^2 - n^2)^2} \omega^2, \dots \dots \dots (146)$$

wo  $\beta$  sehr klein sein soll.

Bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung ergibt sich

$$\frac{n_1^2 - n^2 + R}{2R} = (1 - \beta) \dots \dots \dots (147)$$

$$\frac{n_1^2 - n^2 - R}{2R} = -\beta, \dots \dots \dots (148)$$

also

$$\xi = \alpha \frac{n_1^2}{n_1^2 - n^2} \theta_0 \{ \cos \nu t - \cos \nu_1 t \} \dots \dots \dots (149)$$

und

$$\theta = \theta_0 \{ (1 - \beta) \cos \nu_1 t + \beta \cos \nu t \}, \dots \dots \dots (150)$$

wo  $\nu$  und  $\nu_1$  aus den Formeln (136) und (137) zu entnehmen sind.

Ist  $\rho = \Delta$ , also  $\alpha$ ,  $\omega^2$  und  $\beta$  sehr klein, so sehen wir, dass  $\xi$  immer sehr klein bleibt, wobei es zwei Perioden besitzt.

Was nun  $\theta$  anbelangt, so erkennen wir an der Formel (150) am deutlichsten die Wirkung der gegenseitigen Beeinflussung beider Bewegungen.

Wäre  $\omega^2 = 0$ , so hätten wir

$$\theta = \theta_0 \cos n_1 t$$

gehabt.

In jetzigem Falle treten aber zwei Perioden auf.

Die Amplitude der Hauptperiode, welche sich wenig von  $\tau_1$  unterscheidet, wird nur sehr wenig, nämlich im Verhältniss von  $(1 - \beta)$  zu 1, verkleinert, während die Amplitude der zweiten periodischen Bewegung  $\beta\theta_0$  sehr klein ausfällt.

Diese gegenseitige Einwirkung kann also gewissermaassen als eine Störung der entsprechenden Haupt- oder Eigenbewegung betrachtet werden.

**Zweite Annahme.**  $n = n_1$   $\omega^2$  willkürlich.

Es ergibt sich

$$R = 2n^2\omega,$$

also, da  $\omega^2 = \alpha\alpha_1$  ist,

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \cdot \theta_0 \{ \cos \nu t - \cos \nu_1 t \}$$

und

$$\theta = \frac{1}{2} \theta_0 \{ \cos \nu t + \cos \nu_1 t \},$$

wo  $\nu$  und  $\nu_1$  aus den Formeln (140) und (141) zu entnehmen sind.

#### Zweite Voraussetzung.

Am Anfang der Bewegung sei der Apparat in Ruhe, werde aber um  $\xi_0$  von seiner Ruhelage parallel der  $x$ -Axe abgelenkt und alsdann sich selbst überlassen.

Dementsprechend muss man setzen

$$\text{für } t = 0 \quad \xi = \xi_0 \quad \xi' = 0 \quad \theta = 0 \quad \theta' = 0.$$

Dieser Fall lässt sich ganz ähnlich wie der vorige behandeln.

Führt man die Rechnungen durch, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\xi = \xi_0 \left\{ \frac{n_1^2 - n^2 + R}{2R} \cos \nu t - \frac{n_1^2 - n^2 - R}{2R} \cos \nu_1 t \right\} \dots \dots (151)$$

$$\theta = \frac{\alpha_1 n^2}{R} \xi_0 \{ \cos \nu t - \cos \nu_1 t \} \dots \dots \dots (152)$$

Dies sind die allgemeinen Ausdrücke für  $\xi$  und  $\theta$  unter den vorausgesetzten Bedingungen.

$\nu$  und  $\nu_1$  sind aus den Formeln (124) und (125) zu entnehmen.

Wir können hier wiederum dieselben zwei speciellen Annahmen machen.

**Erste Annahme.**  $\omega^2$  sehr klein;  $n_1$  von  $n$  verschieden.

Es ergibt sich in ganz ähnlicher Weise wie früher

$$\xi = \xi_0 \{ (1 - \beta) \cos \nu t + \beta \cos \nu_1 t \}$$

und

$$\theta = \alpha_1 \frac{n^2}{n_1^2 - n^2} \cdot \xi_0 \{ \cos \nu t - \cos \nu_1 t \},$$

wo  $\nu$  und  $\nu_1$  aus den Formeln (136) und (137) zu entnehmen sind.

Wegen der Kleinheit von  $\alpha_1$ ,  $\omega^2$  und  $\beta$  wird  $\theta$  immer sehr klein bleiben.

Wäre  $\beta = 0$ , so hätten wir gehabt

$$\xi = \xi_0 \cos nt;$$

in jetzigem Falle treten aber zwei Perioden  $T$  und  $T_1$  auf, wobei die Amplitude beim zweiten verhältnissmässig sehr klein ist. Die Wechselwirkung beider Bewegungen kann also ebenfalls gewissermaassen als eine Störung der Haupt- oder Eigenbewegung aufgefasst werden.

**Zweite Annahme.**  $n = n_1$   $\omega^2$  willkürlich.

Wir haben ganz ähnlich wie früher

$$\xi = \frac{1}{2} \xi_0 \{ \cos \nu t + \cos \nu_1 t \}$$

und

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \xi_0 \{ \cos \nu t - \cos \nu_1 t \},$$

wo  $\nu$  und  $\nu_1$  durch die Formeln (140) und (141) gegeben sind.

§ 6.

Experimentelle Prüfung der dargelegten Theorie.

Um die im vorigen Paragraphen entwickelte Theorie der Bewegung eines freien Davison'schen Apparates bei ruhender Unterlage experimentell zu prüfen und sich von der Richtigkeit der erhaltenen Formeln zu überzeugen, sind Versuche mit dem früher erwähnten vereinfachten Modell dieses Apparates (siehe die Fig. 32) ausgeführt worden.

Der Apparat wurde entweder in Schwingungen oder in Drehungen versetzt und die Hauptperiode jeder dieser Bewegungen bei verschiedenen Stellungen des Laufgewichtes  $M$  zwischen den Befestigungspunkten  $A$  und  $B$  beider Drähte gemessen.

Zu diesem Zweck bediente man sich eines sehr guten Löbner'schen Secundenzählers, dessen Correctionen durch Vergleich mit einem Chronometer aus der Pulkowaschen Sternwarte früher bestimmt waren.

Zur Bestimmung der einzelnen Hauptperioden  $T$  und  $T_1$  der schwingenden und drehenden Bewegung wurde die Dauer einer ziemlich grossen Anzahl von Schwingungen gemessen.

Hat man nun  $T$  und  $T_1$  aus Versuchen erhalten, so handelt es sich nur darum, diese Werthe mit den aus den Formeln (128) und (129), resp. (124) und (125) sich ergebenden zu vergleichen.

Um diese Rechnungen durchführen zu können, muss man die Werthe der Constanten  $n^2$ ,  $n_1^2$  und  $\omega^2 = \alpha\alpha_1$  bei verschiedenen Stellungen des Laufgewichtes  $M$  kennen.

Diese Constanten werden durch die Formeln (111), (112), (113) und (114) gegeben.

Alle dazu erforderlichen Data wurden durch directe Ausmessungen erhalten.

Das Laufgewicht  $M$  war ein Messingcylinder von 2,60 cm. Höhe und von 450,7 Gr. Gewicht, welcher centrisc auf dem in Millimeter getheilten Messingstab aufgesetzt war und denselben entlang verschoben werden konnte.

Das Gewicht des Stabes war 28,8 Gr., folglich betrug das Gesamtgewicht des Systems

$$P = 479,5 \text{ Gr.}$$

Wollen wir nun die Entfernung der Mitte des Laufgewichtes von der Mitte  $O'$  des Stabes mit  $d$  bezeichnen, wobei wir allen Entfernungen von  $O'$  nach rechts zum kürzeren Draht hin (siehe die Fig. 32)), das Vorzeichen  $+$  beilegen wollen.

Kennt man  $d$ , so kann man leicht unter Berücksichtigung des Gewichtes des Stabes die Entfernung  $\Delta$  des Schwerpunktes des Systems von  $O'$  berechnen.

Was die Entfernung der Drähte anbelangt, so war

$$2\delta = 24,00 \text{ cm.}$$

Sind nun  $\Delta$  und  $P$  bekannt, so kann man für jede Lage des Laufgewichtes  $M$  die Spannungen  $P_1$  und  $P_2$  der Drähte nach den Formeln (77) und (78) leicht berechnen.

Die Längen der Drähte betrugen

$$a = 118,58 \text{ cm.}$$

$$b = 60,04 \text{ cm.}^1)$$

Mit Hilfe dieser Data liess sich die Entfernung  $\rho$  der Drehungsaxe von  $O'$  nach der Formel (95), so wie auch  $\alpha = \rho - \Delta$ , die Constante  $n^2$  nach der Formel (111) und die reducierte Länge  $l$  des entsprechenden einfachen Pendels nach der Formel (118) leicht berechnen.

Um  $n_1^2$  und  $\alpha_1$  bestimmen zu können, muss man noch das Trägheitsmoment  $K$  des ganzen Systems in Bezug auf die Drehungsaxe, so wie auch die Drehungsconstante  $D$  kennen.

Bedeute nun  $M'$  die Masse des Laufgewichtes und  $m$  die des Stabes und seien  $K_0$  und  $k_0$  die entsprechenden Trägheitsmomente in Bezug auf eine zur  $z$ -Axe parallele Axe, welche durch die entsprechenden Schwerpunkte dieser Massen hindurchgeht, so wird

$$K = K_0 + M'(d - \rho)^2 + k_0 + m\rho^2.$$

Die Ausmessungen ergaben

$$K_0 = 1021,7 \quad \text{C. G. S.}$$

$$k_0 = 1410,3 \quad \text{—}$$

Was nun  $D$  anbelangt, so lässt es sich nach der Formel (99) berechnen.

<sup>1)</sup> Die directen Ausmessungen lieferten  $a = 118,10 \text{ cm.}$  und  $b = 59,65 \text{ cm.}$  Diese Werthe bedürfen in Bezug auf die Dimensionen des Messingstabes kleiner Correctionen  $\Delta a = 0,48 \text{ cm.}$  und  $\Delta b = 0,39 \text{ cm.}$ ; diese ergeben sich aus Schwingungsbeobachtungen mit jedem einzelnen Draht allein, woraus aus der beobachteten Periode die wirklich vorkommende Drahtlänge sich berechnet.

NB. Siehe die Anmerkung <sup>2)</sup> auf Seite 44.

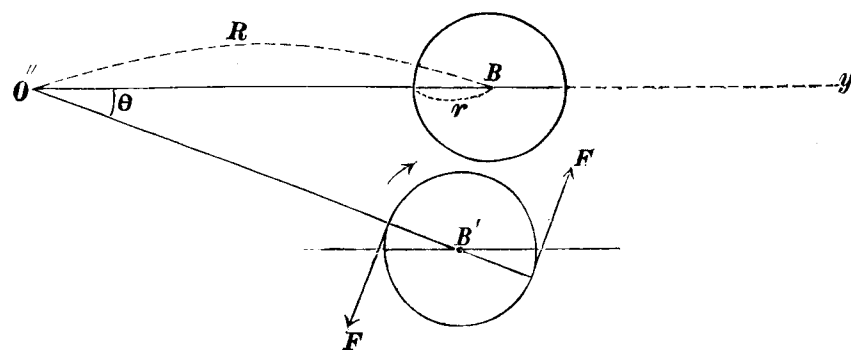
Bezüglich dieser Grösse muss man hier folgendes bemerken.

Unter  $D$  muss man in den vorigen Formeln die totale Drehungsconstante verstehen, welche bei den hier vorkommenden Drehungen in Wirkung tritt. Nun werden bei der Drehung unseres Systems auch die Aufhänge-drähte ebenfalls etwas tordiert und diese complementäre Torsion addiert sich unmittelbar zu der Wirkung von  $D$ .

Bedeute nun  $D_a$  und  $D_b$  die Torsionsconstanten der Drähte, so muss zu demjenigen Werth von  $D$ , welcher sich aus der Formel (99) ergibt, noch  $D_a + D_b$  hinzu addiert werden.

Dies lässt sich in folgender einfacher Weise beweisen.

Fig. 38.



Bedeute auf der Fig. 38 der Kreis, dessen Centrum in  $B$  sich befindet, den Querschnitt des Drahtes  $b$  (im vergrößerten Maassstab). Nach der Drehung  $\theta$  um die momentane Axe  $O''$  verschiebt sich  $B$  nach  $B'$ , wobei der Draht um denselben Winkel  $\theta$  in der Richtung des kleinen Pfeiles tordiert wird.

Bei dieser Torsion tritt eine Kraft  $F$  auf, welche den Draht zu detordieren sucht.

Ist  $r$  der Radius des Drahtes, so wird das entsprechende Drehungsmoment  $S$  infolge der Torsion in Bezug auf die Axe des Drahtes sich so ausdrücken lassen

$$S = 2Fr = D_b \theta,$$

wo  $D_b$  die Drehungsconstante des entsprechenden Drahtes bedeutet.

Wir suchen aber das Drehungsmoment nicht in Bezug auf die Axe des Drahtes, sondern auf die Axe, welche durch  $O''$  hindurchgeht.

Das wirkliche Drehungsmoment  $D\theta$  infolge der bifilaren Aufhängung sucht den Winkel  $\theta$  zu verkleinern.

Die Torsion des Drahtes ruft, wie aus der Figur leicht ersichtlich ist, folgendes Moment in Bezug auf  $O''$  hervor

$$F(R+r) - F(R-r) = 2Fr,$$

wo  $R = \delta - \rho$  die Entfernung zwischen  $O''$  und  $B$  bedeutet.

Nun haben wir eben gesehen, dass

$$2Fr = D_b \theta$$

ist, folglich muss zu  $D$  einfach  $D_b$  addiert werden.

Dieselben Betrachtungen gelten auch für den Draht  $a$ .

Wir sehen also, dass in der zur Bestimmung von  $n_1^2$  dienenden Gleichung (113)  $D$  durch  $D + D_a + D_b$  ersetzt sein muss.

Was nun die numerischen Werthe von  $D_a$  und  $D_b$  betrifft, so lassen sich dieselben sehr einfach aus besonderen Beobachtungen an Torsionsschwingungen mit jedem der Drähte einzeln bestimmen.

Ist z. B. nur der Draht  $a$  vorhanden, und bedeute  $T_a$  die Periode einer vollen Torsionsschwingung und  $K_a$  das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf die Drahtaxe, so wird

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{K_a}{D_a}}.$$

Auf diese Weise lassen sich die Constanten  $D_a$  und  $D_b$  leicht bestimmen.

Es ergab sich

$$D_a + D_b = 381 \text{ C. G. S.}$$

Dies ist eine sehr kleine Grösse, die bei diesen Versuchen höchstens den 0,002<sup>sten</sup> Theil von  $D$  erreichte.

In der hier beschriebenen Weise sind nun die verschiedenen zur Berechnung der Perioden dienenden Constanten bestimmt worden.

Dieselben sind in der folgenden Tabelle I zusammengestellt.

Ausser  $\omega^2$  sind in der Tabelle I noch die Werthe von  $\beta$  nach der Formel (146) und die Eigenperioden  $\tau = \frac{2\pi}{n}$  und  $\tau_1 = \frac{2\pi}{n_1}$  (für  $\omega^2 = 0$ ) angegeben.

Tabelle I.

$d$	$\Delta$	$P_1$	$P_2$	$\rho$	$l$	$n^2$	$n_1^2$	$\omega^2$	$\beta$	$\tau$	$\tau_1$
Cm.	Cm.	Gr.	Gr.	Cm.	Cm.						
10,50	9,87	42,6	436,9	10,87	62,79	15,638	32,878	0,0817	0,1413	1,59	1,10
5,35	5,03	139,3	340,2	7,88	70,09	14,008	77,498	0,5484	0,1477	1,68	0,71
0,01	0,01	239,5	240,0	3,94	79,69	12,321	77,154	0,7532	0,1703	1,79	0,72
— 5,35	— 5,03	340,2	139,3	— 1,27	92,43	10,623	72,722	0,6787	0,1360	1,93	0,74
— 10,69	— 10,05	440,5	39,0	— 8,43	109,88	8,936	46,141	0,1853	0,0552	2,10	0,93

Wir sehen aus dieser Tabelle, dass  $d$  zwischen ziemlich weiten Grenzen variiert hat.

$\rho - \Delta$  blieb dabei immer positiv.

Mit abnehmendem  $d$  nimmt  $l$  und folglich auch  $\tau$  stetig zu.

Was nun  $\tau_1$  betrifft, so erhält dasselbe am Anfang seinen maximalen Werth, nimmt alsdann mit abnehmendem  $d$  ab, behält für die mittleren Lagen des Laufgewichtes einen ziemlich constanten Werth, um dann wieder zuzunehmen.

$\omega^2$  so wie auch  $\beta$  sind am kleinsten für die Grenzstellungen des Laufgewichtes  $M$ . Für eine bestimmte mittlere Stellung von  $M$  erreichen sie ein Maximum.

Für  $d = 0,01$  cm. hat  $\omega^2$  schon einen ziemlich beträchtlichen Werth, nämlich 0,7532.

Mit diesen hier angeführten Werthen von  $n^2$ ,  $n_1^2$  und  $\omega^2$  sind nun  $v^2$  und  $v_1^2$  nach den genauen Formeln (124) und (125) und aus ihnen nach den Formeln (128) und (129) die Hauptperioden  $T$  und  $T_1$  jeder der beiden Bewegungen berechnet worden.

Die entsprechenden Werthe von  $T$  und  $T_1$  sind nun in der folgenden Tabelle II zusammengestellt, wobei neben der berechneten Periode die direct beobachtete angegeben ist.

Tabelle II.

$d$	$T$		$T_1$	
	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.
Cm.				
10,50	1,64	1,65	1,02	1,01
5,35	1,77	1,75	0,46	0,45
0,01	1,90	1,90	0,34	0,35
— 5,35	2,02	2,03	0,40	0,40
— 10,69	2,15	2,16	0,82	0,80

Wir sehen aus dieser Tabelle, dass die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und direct beobachteten Werthen der Perioden als eine äusserst befriedigende zu bezeichnen ist.

Der maximale Unterschied zwischen den berechneten und beobachteten Perioden beträgt nur 0,02.

Wir sehen auch, dass  $T$  und  $T_1$  von den Eigenperioden  $\tau$  und  $\tau_1$  verschieden sind, wobei bei  $T_1$  der Unterschied für mittlere Stellungen des Laufgewichtes ein ziemlich beträchtlicher ist, für  $d = 0,01$  cm. ist  $\tau_1$  sogar mehr als doppelt so gross wie  $T_1$ .

## § 7.

### Theorie der Bewegung des freien Davison'schen Apparates bei ruhender Unterlage unter Berücksichtigung der Dämpfung.

Wir haben im § 5 die Theorie der Bewegung des freien Davison'schen Apparates entwickelt und dieselbe im § 6 geprüft.

Die Gesetze dieser Bewegungen bieten, wie wir gesehen haben, manche interessante Eigenthümlichkeiten auf, die gewissermaassen als eine Art Störungen aufgefasst werden können.

Bei diesen Entwicklungen haben wir von der Wirkung der Dämpfung vollständig abgesehen und wurden zu den Differentialgleichungen (115) und (116) geführt, welche die Bewegungen des Apparates in diesem Fall beherrschen.

Will man nun den Einfluss der Dämpfung mitberücksichtigen, so braucht man nur in den früher gefundenen Differentialgleichungen der Bewegung die bekannten Glieder, welche von der Dämpfung abhängen, einfach hinzuzufügen.

Thut man das, so ergeben sich folgende zwei verallgemeinerte Differentialgleichungen der Bewegung unseres Apparates, wo der Einfluss der Dämpfung schon mitberücksichtigt ist.

$$\xi'' + 2\varepsilon\xi' + n^2\xi + \alpha\theta'' = 0 \dots\dots\dots(153)$$

$$\theta'' + 2\varepsilon_1\theta' + n_1^2\theta + \alpha_1\xi'' = 0 \dots\dots\dots(154)$$

Hierin bedeuten  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  die entsprechenden Dämpfungsconstanten jeder dieser Bewegungen.

Diese beiden Gleichungen bilden nun den Ausgangspunkt der weiter zu entwickelnden Theorie.

Ist keine Wechselwirkung zwischen diesen zwei Bewegungen des Apparates vorhanden, ist also  $\alpha$  und  $\alpha_1$  gleich Null, so vereinfachen sich diese Gleichungen zu den folgenden

$$\xi'' + 2\varepsilon\xi' + n^2\xi = 0 \dots\dots\dots(155)$$

$$\theta'' + 2\varepsilon_1\theta' + n_1^2\theta = 0 \dots\dots\dots(156)$$

und ihre Integrale nehmen folgende Gestalt an:

Für  $\varepsilon < n, \varepsilon_1 < n_1$

$$\xi = e^{-\varepsilon t} [A \cos pt + B \sin pt] \dots\dots\dots(157)$$

$$\theta = e^{-\varepsilon_1 t} [A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t], \dots\dots\dots(158)$$

wo

$$p = +\sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \dots\dots\dots(159)$$

und

$$p_1 = +\sqrt{n_1^2 - \varepsilon_1^2} \dots\dots\dots(160)$$

ist.

$A, B, A_1$  und  $B_1$  sind Integrationsconstanten, welche von den Anfangsbedingungen unmittelbar abhängen.

Diese Ausdrücke für  $\xi$  und  $\theta$  stellen gedämpfte Sinusschwingungen dar.

Für  $\varepsilon > n, \varepsilon_1 > n_1$

$$\xi = A e^{-\nu_1 t} + B e^{-\nu_2 t} \dots\dots\dots(161)$$

$$\theta = A_1 e^{-\sigma_1 t} + B_1 e^{-\sigma_2 t} \dots\dots\dots(162)$$

Hierin bedeuten

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \varepsilon + q \\ \nu_2 &= \varepsilon - q \\ q &= +\sqrt{\varepsilon^2 - n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(163)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \varepsilon_1 + q_1 \\ \sigma_2 &= \varepsilon_1 - q_1 \\ q_1 &= +\sqrt{\varepsilon_1^2 - n_1^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(164)$$

$A, B, A_1$  und  $B_1$  sind wiederum Integrationsconstanten.

Diese neuen Ausdrücke für  $\xi$  und  $\theta$  entsprechen schon einer aperiodischen Bewegung.

Um eine solche aperiodische Bewegung zu verwirklichen, muss schon die Dämpfung sehr stark sein, was bekanntlich auf electromagnetischem Wege leicht zu erzielen ist.

Die hier angegebenen zwei Ausdrücke für  $\xi$  und für  $\theta$  stellen sozusagen die normalen Eigenbewegungen des Apparates dar, deren Charakter von dem Werthe der entsprechenden Dämpfungsconstante unmittelbar abhängt.

Es fragt sich nun: Welchen Charakter werden diese Bewegungen haben, wenn eine Wechselwirkung zwischen denselben besteht?

Dazu muss man die Integrale unserer simultanen Differentialgleichungen (153) und (154) aufsuchen.

Wollen wir zunächst  $\theta$  aus denselben eliminieren.

Bestimmt man  $\theta''$  aus der Gleichung (154) und bringt sie in die Gleichung (153) ein, so ergibt sich

$$(1 - \alpha\alpha_1)\xi'' + 2\varepsilon\xi' + n^2\xi - 2\alpha\varepsilon_1\theta' = \alpha n_1^2\theta.$$

Differentieren wir diese Gleichung einmal nach der Zeit  $t$  und ersetzen in ihr  $\theta''$  durch seinen Werth aus der Gleichung (153), so folgt

$$(1 - \alpha\alpha_1)\xi''' + 2(\varepsilon + \varepsilon_1)\xi'' + (n^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1)\xi' + 2\varepsilon_1 n^2\xi = \alpha n_1^2\theta'.$$

Differentiert man diesen Ausdruck nach  $t$ , so wird  $\theta''$  durch  $\xi''''$ ,  $\xi'''$ ,  $\xi''$  und  $\xi'$  ausgedrückt.

Setzt man nun diesen Werth von  $\theta''$  in die Formel (153) ein, so erhält man folgende lineare Differentialgleichung 4<sup>ter</sup> Ordnung in  $\xi$  allein.

Es wird, da  $\alpha\alpha_1 = \omega^2$  ist,<sup>1)</sup>

$$(1 - \omega^2)\xi'''' + 2(\varepsilon + \varepsilon_1)\xi''' + (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1)\xi'' + 2(\varepsilon n_1^2 + \varepsilon_1 n^2)\xi' + n^2 n_1^2 \xi = 0 \dots\dots(165)$$

Es ist leicht einzusehen,<sup>2)</sup> dass die Differentialgleichung für  $\theta$  genau dieselbe Form annimmt; man braucht also nur in der Formel (165)  $\xi$  durch  $\theta$  zu ersetzen.

Unsere Aufgabe beschränkt sich also nur auf die Integrierung der Differentialgleichung (165).

<sup>1)</sup> Siehe die Gleichung (122).

<sup>2)</sup> Da die Gleichung (165) ganz symmetrisch in Bezug auf die Constanten gebaut ist.

Setzen wir dementsprechend

$$\xi = e^{-\mu t},$$

so erhalten wir folgende algebraische Gleichung 4<sup>ten</sup> Grades:

$$(1 - \omega^2)\mu^4 - 2(\varepsilon + \varepsilon_1)\mu^3 + (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1)\mu^2 - 2(\varepsilon n_1^2 + \varepsilon_1 n^2)\mu + n^2 n_1^2 = 0 \dots (166)$$

Bezeichnen wir die 4 Wurzeln dieser Gleichung resp. durch  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  und  $\mu_4$ , so ergibt sich

$$\xi = Ae^{-\mu_1 t} + Be^{-\mu_2 t} + Ce^{-\mu_3 t} + De^{-\mu_4 t} \dots (167)$$

und

$$\theta = A_1 e^{-\mu_1 t} + B_1 e^{-\mu_2 t} + C_1 e^{-\mu_3 t} + D_1 e^{-\mu_4 t} \dots (168)$$

Hierin bedeuten  $A, B, C$  u. s. w. Integrationsconstanten.

Diese beiden Formeln stellen die allgemeine Lösung unserer Aufgabe dar, wobei je nach der Beschaffenheit der Wurzeln  $\mu$  im Ausdruck für  $\xi$  und  $\theta$  trigonometrische oder Exponentialfunctionen vorkommen können.

Wäre  $\omega^2 = 0$ , so würde der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (166) sich durch das Produkt zweier Polynome zweiten Grades darstellen lassen.

Es wird nämlich

$$(\mu^2 - 2\varepsilon\mu + n^2)(\mu^2 - 2\varepsilon_1\mu + n_1^2) = 0 \dots (169)$$

Setzt man das erste Polynom gleich Null, also

$$\mu^2 - 2\varepsilon\mu + n^2 = 0, \dots (170)$$

so folgt

$$\mu_1 = \nu_1 = \varepsilon + q$$

$$\mu_2 = \nu_2 = \varepsilon - q.$$

In ähnlicher Weise erhält man, wenn das zweite Polynom gleich Null gesetzt wird, also

$$\mu^2 - 2\varepsilon_1\mu + n_1^2 = 0 \dots (171)$$

$$\mu_3 = \sigma_1 = \varepsilon_1 + q_1$$

$$\mu_4 = \sigma_2 = \varepsilon_1 - q_1.$$

Diese 4 Wurzeln entsprechen den normalen Eigenbewegungen des Apparates. Diese Ausdrücke haben eine ganz allgemeine Bedeutung, da der Fall, wo  $\xi$  und  $\theta$  sich durch trigonometrische Functionen ausdrücken lassen, mit einbegriffen ist.<sup>1)</sup>

Ist aber  $\omega^2$  von 0 verschieden, so tritt eine Wechselwirkung ein, und die 4 Wurzeln  $\mu$  erfahren eine entsprechende Abänderung.

Die Abhängigkeit dieser Wurzeln von  $\omega^2$  ist eine sehr complicierte, aber die allgemeinen Ausdrücke derselben lassen sich durch Anwendung der bekannten Methoden der algebraischen Analysis zur Lösung einer Gleichung 4<sup>ten</sup> Grades angeben.

Denken wir uns also eine Gleichung 4<sup>ten</sup> Grades gegeben, etwa von der Form

$$\mu^4 + a\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d = 0 \dots (172)$$

Die Bedeutung der Constanten ist durch Vergleich mit der Gleichung (166) klar.

Es wird nämlich

$$\left. \begin{aligned} a &= -2 \frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{1 - \omega^2} \\ b &= \frac{n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1}{1 - \omega^2} \\ c &= -2 \frac{\varepsilon n_1^2 + \varepsilon_1 n^2}{1 - \omega^2} \\ d &= \frac{n^2 n_1^2}{1 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \dots (173)$$

Nach der bekannten Methode von Ferrari entsprechen die gesuchten 4 Werthe von  $\mu$  den Wurzeln folgender zweier quadratischer Gleichungen

$$\mu^2 + \left\{ \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + s} \right\} \mu + \left\{ \frac{s}{2} + \frac{\frac{as}{2} - c}{2 \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + s}} \right\} = 0 \dots (174)$$

und

$$\mu^2 + \left\{ \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + s} \right\} \mu + \left\{ \frac{s}{2} - \frac{\frac{as}{2} - c}{2 \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + s}} \right\} = 0 \dots (175)$$

Hierin bedeutet  $s$  eine Wurzel der cubischen Gleichung

$$s^3 - bs^2 + (ac - 4d)s - d(a^2 - 4b) - c^2 = 0 \dots (176)$$

<sup>1)</sup>  $q$  und  $q_1$  werden nur imaginär.

Wir sehen also, dass die allgemeinen Ausdrücke für  $\mu$  sehr compliciert ausfallen werden. Wir wollen uns aber nicht mit der allgemeinen Lösung dieses Problems beschäftigen, sondern uns nur auf den Fall beschränken, wo  $\omega^2$  eine sehr kleine Grösse ist, so dass Glieder höherer Ordnung, wie  $\omega^4$  etc., vernachlässigt werden dürfen.

Für  $\omega^2 = 0$  reducirt sich die Gleichung (174) etwa auf die Gleichung (170).

Wir können also in diesem Fall setzen

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + s} = -2\epsilon$$

und

$$\frac{s}{2} + \frac{\frac{as}{2} - c}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + s}} = n^2.$$

Ist aber  $\omega^2$  von 0 verschieden, so können wir, unter Beibehaltung von Gliedern nur erster Ordnung in Bezug auf  $\omega^2$ , schreiben

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + s} = -2(\epsilon + \beta\omega^2)$$

und

$$\frac{s}{2} + \frac{\frac{as}{2} - c}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + s}} = n^2 + \delta\omega^2,$$

wo  $\beta$  und  $\delta$  zwei Constanten bedeuten.

Wir haben also zur Bestimmung der beiden ersten Wurzeln folgende Gleichung

$$\mu^2 - 2(\epsilon + \beta\omega^2)\mu + (n^2 + \delta\omega^2) = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$\mu = \epsilon + \beta\omega^2 \pm \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon\beta\omega^2 - n^2 - \delta\omega^2}.$$

Setzen wir nun

$$2\epsilon\beta - \delta = \gamma,$$

so folgt

$$\mu_1 = (\epsilon + \beta\omega^2) + \sqrt{(\epsilon^2 - n^2) + \gamma\omega^2} \dots\dots\dots(177)$$

$$\mu_2 = (\epsilon + \beta\omega^2) - \sqrt{(\epsilon^2 - n^2) + \gamma\omega^2} \dots\dots\dots(178)$$

In ganz ähnlicher Weise würde sich ergeben

$$\mu_3 = (\epsilon_1 + \beta_1\omega^2) + \sqrt{(\epsilon_1^2 - n_1^2) + \gamma_1\omega^2} \dots\dots\dots(179)$$

$$\mu_4 = (\epsilon_1 + \beta_1\omega^2) - \sqrt{(\epsilon_1^2 - n_1^2) + \gamma_1\omega^2} \dots\dots\dots(180)$$

Es handelt sich also nur darum, die 4 Constanten  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  zu bestimmen. Sind dieselben einmal bekannt, so werden die Wurzeln der Gleichung (166) und folglich auch die Gesetze der Bewegung unseres Apparates sich aufklären.

Zur Bestimmung dieser Constanten wollen wir folgenden Weg einschlagen.

Aus den Gleichungen (177) und (178) erhält man, unter Berücksichtigung der dritten der Beziehungen (163) und wenn  $q$  nicht sehr klein ist,

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \epsilon + q + \tau_1\omega^2 \\ \mu_2 &= \epsilon - q + \tau_2\omega^2, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(181)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \beta + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{q} \\ \tau_2 &= \beta - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(182)$$

ist.

Unsere fundamentale Gleichung (166) können wir nun folgendermaassen schreiben

$$(\mu^2 - 2\epsilon\mu + n^2)(\mu^2 - 2\epsilon_1\mu + n_1^2) - \omega^2\mu^4 = 0 \dots\dots(183)$$

Bringen wir nun diese Werthe von  $\mu$  aus den Gleichungen (181) und (182) in diese Gleichung ein, so ergibt sich, bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung und unter Berücksichtigung der Beziehungen (163) und (164)

$$2q\tau_1 \{(v_1 - \sigma_1)(v_1 - \sigma_2)\} = v_1^4$$

$$-2q\tau_2 \{(v_2 - \sigma_1)(v_2 - \sigma_2)\} = v_2^4.$$

Führen wir folgende Bezeichnungen ein

$$P_1 = \frac{v_1^4}{(v_1 - \sigma_1)(v_1 - \sigma_2)} \dots\dots\dots(184)$$

$$P_2 = \frac{v_2^4}{(v_2 - \sigma_1)(v_2 - \sigma_2)} \dots\dots\dots(185)$$



Dann wird auf Grund der Beziehungen (182)

$$2q\beta + \gamma = P_1$$

$$2q\beta - \gamma = -P_2.$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4q} [P_1 - P_2] \\ \gamma &= \frac{1}{2} [P_1 + P_2], \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (186)$$

also

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= v_1 + \frac{P_1}{2q} \omega^2 \\ \mu_2 &= v_2 - \frac{P_2}{2q} \omega^2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (187)$$

$\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu_1$  und  $\mu_2$  sind also bestimmt.

Die Bestimmung von  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  geschieht genau auf dieselbe Weise.

Sei

$$Q_1 = \frac{\sigma_1^4}{(\sigma_1 - v_1)(\sigma_1 - v_2)} \dots\dots\dots (188)$$

$$Q_2 = \frac{\sigma_2^4}{(\sigma_2 - v_1)(\sigma_2 - v_2)} \dots\dots\dots (189)$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{4q} [Q_1 - Q_2] \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2} [Q_1 + Q_2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (190)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mu_3 &= \sigma_1 + \frac{Q_1}{2q_1} \omega^2 \\ \mu_4 &= \sigma_2 - \frac{Q_2}{2q_1} \omega^2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (191)$$

Die erhaltenen Ausdrücke für  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  haben eine ziemlich einfache und symmetrische Gestalt. Dieselben liefern im Verein mit den Gleichungen (177), (178), (179) und (180), wie auch mit den Gleichungen (167) und (168) die allgemeine Lösung unseres Problems für sehr kleine Werthe von  $\omega^2$ .<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Nur aber unter der Voraussetzung, dass  $\epsilon^2 - n^2$  und  $\epsilon_1^2 - n_1^2$  von Null verschieden sind.

Auf Grund dieser Formeln können die Gesetze der Bewegung unseres Apparates unter den verschiedensten Bedingungen erforscht werden.

Wir werden aber hier nur zwei ganz specielle Fälle besprechen.

### I Fall.

$$\epsilon = \epsilon_1 = 0.$$

Es ergibt sich dann

$$v_1 = ni$$

$$v_2 = -ni$$

$$\sigma_1 = n_1 i$$

$$\sigma_2 = -n_1 i$$

$$P_1 = P_2 = \frac{n^4}{n_1^2 - n^2}$$

$$Q_1 = Q_2 = -\frac{n_1^4}{n_1^2 - n^2}$$

$$\beta = 0 \qquad \gamma = \frac{n^4}{n_1^2 - n^2}$$

$$\beta_1 = 0 \qquad \gamma_1 = -\frac{n_1^4}{n_1^2 - n^2}$$

$$\mu_1 = ni \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{n^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right\}$$

$$\mu_2 = -ni \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{n^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right\}$$

$$\mu_3 = n_1 i \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{n_1^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right\}$$

$$\mu_4 = -n_1 i \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{n_1^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right\}.$$

Wir sehen also, dass in diesem Falle jede der beiden Bewegungen des Apparates (für  $\xi$  und  $\theta$ ) eine periodische ist mit zwei verschiedenen Perioden, nämlich

$$T = \frac{2\pi}{n} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right]$$

und

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{n_1^2}{n_1^2 - n^2} \omega^2 \right],$$

in vollständiger Uebereinstimmung mit den Gleichungen (138) und (139).

II Fall.

$$\varepsilon = n, \quad \varepsilon_1 = n_1.$$

In diesem Fall muss man zur Bestimmung der Wurzeln  $\mu$  zu den directen Formeln (177), (178), (179) und (180) zurückgreifen.

Jetzt treten in den Ausdrücken für  $\mu$  schon Glieder auf, welche nur die erste Potenz von  $\omega$  enthalten.

Es wird nämlich

$$\begin{aligned} \mu_1 &= n + \sqrt{\gamma} \cdot \omega + \beta \omega^2 \\ \mu_2 &= n - \sqrt{\gamma} \cdot \omega + \beta \omega^2 \\ \mu_3 &= n_1 + \sqrt{\gamma_1} \cdot \omega + \beta_1 \omega^2 \\ \mu_4 &= n_1 - \sqrt{\gamma_1} \cdot \omega + \beta_1 \omega^2. \end{aligned}$$

Diese Werthe müssen nun der Reihe nach in die Gleichung (183) eingesetzt werden.

Dieselbe nimmt aber im jetzigen Fall folgende Gestalt an

$$(\mu - n)^2 (\mu - n_1)^2 - \omega^2 \mu^4 = 0.$$

Es ergibt sich daraus ohne Weiteres bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{n^4}{(n - n_1)^2} \\ \text{und} \\ \gamma_1 &= \frac{n_1^4}{(n_1 - n)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (192)$$

Die Werthe von  $\beta$  und  $\beta_1$  brauchen wir nicht aufzusuchen, da es in den Ausdrücken für die Wurzeln  $\mu$  genügt, nur die Glieder niedrigster Ordnung in Bezug auf  $\omega$  beizubehalten.

Die vier Wurzeln lauten also

$$\begin{aligned} \mu_1 &= n \left[ 1 - \frac{n}{n_1 - n} \omega \right] \\ \mu_2 &= n \left[ 1 + \frac{n}{n_1 - n} \omega \right] \\ \mu_3 &= n_1 \left[ 1 + \frac{n_1}{n_1 - n} \omega \right] \\ \mu_4 &= n_1 \left[ 1 - \frac{n_1}{n_1 - n} \omega \right]. \end{aligned}$$

Beide Bewegungen ( $\xi$  und  $\theta$ ) unseres Apparates werden also einen aperiodischen Charakter besitzen.

§ 8.

Schwingungen eines freien Davison'schen Apparates in der Ebene der Aufhängedrähte.

In den vorigen drei Paragraphen haben wir die Bewegung eines freien Davison'schen Apparates unter verschiedenen Umständen untersucht, aber dabei nur die Schwingungen desselben parallel der  $x$ -Axe, d. h. senkrecht zur Ebene der Aufhängedrähte mitberücksichtigt.

Es fragt sich nun, wie wird sich die Bewegung dieses Apparates gestalten, wenn derselbe in der Ebene der Aufhängedrähte, d. h. parallel der  $y$ -Axe, von seiner Ruhelage abgelenkt und alsdann sich selbst überlassen wird.

Zur Beantwortung dieser Frage habe ich den entsprechenden Versuch mit dem früher erwähnten Modell (siehe Fig. 33) ausgeführt und dabei eine sehr merkwürdige und interessante Bewegung wahrgenommen.

Wurde nämlich der Apparat parallel der  $y$ -Axe von seiner Ruhelage abgelenkt und alsdann sich selbst überlassen, so beobachtete man folgendes.

Am Anfang schwang einige Zeit der Apparat in der Ebene der Aufhängedrähte wie ein einfaches Verticalpendel, dann fing er an sich allmählig zu drehen, und bei jeder folgenden Schwingung wurde der Winkel  $\theta$  immer grösser und grösser und erreichte auf diese Weise recht beträchtliche Werthe. Nach Erreichung dieses Maximums fing  $\theta$  an abzunehmen und bei jeder folgenden Schwingung wurde der Ausschlag  $\theta$  kleiner, als der vorhergegangene. Nach Verlauf von einiger Zeit kehrte  $\theta$  auf Null zurück, und der Apparat schwang alsdann eine Zeitweile, wie am Anfang der Bewegung, d. h. wie ein einfaches Pendel in der  $yz$ -Ebene.

Dann fing  $\theta$  wiederum an sich zu vergrössern und erreichte abermals ein recht beträchtliches Maximum, um dann nach einiger Zeit wieder auf Null herabzusinken.

Dieses periodische Heranwachsen von  $\theta$  wiederholte sich in sehr regelmässiger Weise, wobei die ganze Bewegung einen sehr sonderbaren Charakter hatte.

Dieselbe trat so unerwartet hervor und erschien mir so interessant, dass ich mich gezwungen sah, die Theorie dieser Bewegung etwas näher zu untersuchen.

Die entsprechenden theoretischen Erörterungen mögen nun weiter folgen.

Bezeichnen wir durch  $\xi$  und  $y_0 + \eta$  die Coordinaten der momentanen Drehungsaxe  $O''$  (siehe die Fig. 36 und 37) im Moment  $t$ , wo  $\xi$  und  $\eta$  als

veränderliche kleine Grössen von derselben Ordnung zu betrachten sind. Was nun die dritte Coordinate  $z$  von  $O''$  anbelangt, so erkennt man auf Grund der Formeln (84) und (85) leicht, dass die Aenderung derselben sich durch eine kleine Grösse höherer Ordnung ausdrückt, folglich können wir bei der Berechnung der lebendigen Kraft des Systems die Aenderung von  $z$  ausser Acht lassen.

Seien nun  $x$  und  $y$  die Coordinaten eines beliebigen Punktes  $M_1$  unseres Systems (siehe die Fig. 37), welcher in der Entfernung  $d$  von der Drehungsaxe sich befindet. Dann können wir bei Beibehaltung der früheren Bezeichnungen setzen

$$\begin{aligned} x &= \xi - d \sin(\theta + \alpha) \\ y &= y_0 + \eta + d \cos(\theta + \alpha). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x' &= \xi' - d \cos(\theta + \alpha) \cdot \theta' \\ y' &= \eta' - d \sin(\theta + \alpha) \theta'. \end{aligned}$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit  $v$  des Punktes  $M_1$  erhält die Form

$$v^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + d^2 \theta'^2 - 2d \cos(\theta + \alpha) \xi' \theta' - 2d \sin(\theta + \alpha) \eta' \theta'. \dots (193)$$

Hätte man die Aenderung der dritten Coordinate des Punktes  $M_1$  mitberücksichtigt, so würde im Ausdrucke für  $v^2$  noch ein Glied 4<sup>ter</sup> Ordnung hinzutreten, welches selbstverständlich ausser Acht gelassen werden darf.

Die totale lebendige Kraft  $T$  des Systems drückt sich also folgendermaassen aus:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \Sigma m [\xi'^2 + \eta'^2 + d^2 \theta'^2 - 2d \{\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha\} \xi' \theta' - \\ - 2d \{\sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta\} \eta' \theta']. \end{aligned}$$

Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \Sigma m &= M = \frac{P}{g}, \\ \Sigma m d^2 &= K \end{aligned}$$

und berücksichtigen noch dabei, dass

$$\Sigma m d \cos \alpha = M (\Delta - \rho) = \frac{P}{g} (\Delta - \rho)$$

und

$$\Sigma m d \sin \alpha = 0$$

ist, so folgt

$$T = \frac{1}{2} [M \xi'^2 + M \eta'^2 + K \theta'^2 + 2M (\rho - \Delta) \cos \theta \cdot \xi' \theta' + 2M (\rho - \Delta) \sin \theta \cdot \eta' \theta']. \dots (194)$$

Daraus ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \xi'} &= M \xi' + M (\rho - \Delta) \cos \theta \cdot \theta' & \frac{\partial T}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \eta'} &= M \eta' + M (\rho - \Delta) \sin \theta \cdot \theta' & \frac{\partial T}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta'} &= K \theta' + M (\rho - \Delta) \cos \theta \cdot \xi' + M (\rho - \Delta) \sin \theta \cdot \eta' \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -M (\rho - \Delta) \sin \theta \cdot \xi' \theta' + M (\rho - \Delta) \cos \theta \cdot \eta' \theta'. \end{aligned} \right\} \dots (195)$$

Wollen wir nun das Lagrange'sche Princip in Anwendung bringen. Es wird nämlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} &= \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta} &= \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = -D\theta. \end{aligned} \right\} \dots (196)$$

Hierin bedeuten  $\left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) d\xi$ , resp.  $\left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) d\eta$  und  $\left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) d\theta$  die Arbeit der Kräfte, wenn die entsprechende Coordinate  $\xi$ ,  $\eta$  oder  $\theta$  um einen unendlich kleinen Betrag vermehrt wird.

Auf Grund der Formeln (195) kann man schreiben

$$\left. \begin{aligned} M \xi'' + M (\rho - \Delta) \theta'' &= \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \\ M \eta'' + M (\rho - \Delta) \{ \theta \theta'' + \theta'^2 \} &= \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \\ K \theta'' + M (\rho - \Delta) \xi'' + M (\rho - \Delta) \theta \cdot \eta'' &= \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \dots (197)$$

Wollen wir nun die Werthe der Grössen auf der rechten Seite der drei vorigen Gleichungen aufsuchen.

Bezugnehmend auf die früheren Bezeichnungen (siehe die Formeln (90), (91) und (92)) ergibt sich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) &= P_1 [\cos \alpha_1 \cos \lambda + \cos \beta_1 \cos \mu + \cos \gamma_1 \cos \nu] [\delta + \rho] \\ &\quad - P_2 [\cos \alpha_2 \cos \lambda + \cos \beta_2 \cos \mu + \cos \gamma_2 \cos \nu] [\delta - \rho]. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man dabei, dass die Werthe von  $\cos \alpha_1$  und  $\cos \beta_1$ , wie auch  $\cos \alpha_2$  und  $\cos \beta_2$ , welche durch die Formeln (90) und (91) gegeben sind, bis auf Glieder dritter Ordnung richtig sind und dass  $\cos \nu = 0$  ist, so gelten auch die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) = - \left[ \frac{P_1}{a} \xi_1 + \frac{P_2}{b} \xi_2 \right] \dots \dots \dots (198)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = - \left[ \frac{P_1}{a} \eta_1 + \frac{P_2}{b} \eta_2 \right] \dots \dots \dots (199)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = - \left[ P_1 \left\{ \frac{\xi_1}{a} - \frac{\eta_1}{a} \cdot \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \right\} (\delta + \rho) - P_2 \left\{ \frac{\xi_2}{b} - \frac{\eta_2}{b} \cdot \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \right\} (\delta - \rho) \right] \dots (200)$$

Nun ist aus der Figur (37) und auf Grund der früheren Bezeichnungen sofort zu ersehen, dass

$$\xi_1 = \xi + (\delta + \rho) \sin \theta$$

$$\xi_2 = \xi - (\delta - \rho) \sin \theta.$$

$$\eta_1 = \eta + (\delta + \rho) (1 - \cos \theta)$$

$$\eta_2 = \eta - (\delta - \rho) (1 - \cos \theta).$$

Bringt man diese Werthe in die drei vorigen Gleichungen ein und berücksichtigt dabei die Beziehungen (97) und (98), so treten bedeutende Vereinfachungen auf, und es ergibt sich schliesslich bis auf Glieder dritter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) &= - \left[ \frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b} \right] \xi \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) &= - \left[ \frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b} \right] \eta \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) &= - \frac{4P_1P_2}{aP_2 + bP_1} \delta^2 \cdot \theta = - D\theta.^1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (201)$$

<sup>1)</sup> Siehe die Formel (99).

Setzen wir nun diese Werthe in die Gleichungen (197) ein, berücksichtigen noch dabei die Bezeichnungen, welche durch die Gleichungen (111), (112), (113) und (114) festgestellt sind und schreiben zur Vereinfachung

$$\theta\theta'' + \theta'^2 = \tau, \dots \dots \dots (202)$$

wo  $\tau$  als eine kleine Grösse zweiter Ordnung zu betrachten ist, so erhalten wir folgende drei Differentialgleichungen, welche die Bewegung unseres Apparates wiedergeben:

$$\xi'' + n^2 \xi + \alpha \theta'' = 0 \dots \dots \dots (203)$$

$$\eta'' + n^2 \eta + \alpha \tau = 0 \dots \dots \dots (204)$$

$$\theta'' + n_1^2 \theta + \alpha_1 \xi'' + \alpha_1 \theta \eta'' = 0. \dots \dots \dots (205)$$

In diesen Gleichungen ist der Einfluss der Dämpfung ausser Acht gelassen worden.

Die Kenntniss der Gesetze der Bewegung unseres Apparates erfordert die Integration dieser drei simultanen Differentialgleichungen.

Die allgemeine Behandlung dieser Aufgabe bietet sehr grosse Schwierigkeiten dar und führt zu äusserst complicierten Rechnungen, deshalb sah ich mich genöthigt vereinfachende Voraussetzungen zu machen und nur eine erste Annäherung der Lösung unseres Problems aufzusuchen.

Uns interessiert hauptsächlich die Drehung ( $\theta$ ) des Apparates, folglich wollen wir nur den Ausdruck von  $\theta$  als Function von  $t$  aufsuchen.

Zu diesem Zweck wollen wir zuerst  $\eta$  aus den Gleichungen (204) und (205) eliminieren.

Setzen wir der Einfachheit wegen

$$\theta'' + n_1^2 \theta + \alpha_1 \xi'' = \varphi \dots \dots \dots (206)$$

Dann erhält man aus der Gleichung (205)

$$\eta'' = - \frac{1}{\alpha_1} \left( \frac{\varphi}{\theta} \right).$$

Bringt man diesen Werth in die Gleichung (204) ein, so folgt

$$\eta = \frac{1}{n^2} \left[ \frac{1}{\alpha_1} \cdot \left( \frac{\varphi}{\theta} \right) - \alpha \tau \right],$$

also

$$\eta'' = \frac{1}{n^2} \left[ \frac{1}{\alpha_1} \left( \frac{\varphi}{\theta} \right)'' - \alpha \tau'' \right].$$

Führt man nun diesen Werth in der Formel (205) ein, so gilt, da  $\alpha\alpha_1 = \omega^2$  ist (siehe die Formel (122)),

$$\left(\frac{\varphi}{\theta}\right)'' + n^2 \left(\frac{\varphi}{\theta}\right) = \omega^2 \tau''. \dots\dots\dots(207)$$

$\tau$  ist eine sehr kleine Grösse höherer Ordnung (siehe die Formel (202)); wollen wir sie also vernachlässigen und gleich Null setzen.

Dann lässt sich die Gleichung sofort integrieren.

Es wird nämlich

$$\frac{\varphi}{\theta} = \beta \cos(nt + \delta), \dots\dots\dots(208)$$

wo  $\beta$  und  $\delta$  zwei Integrationsconstanten bedeuten.

Wollen wir ihre Werthe aufsuchen.

Denken wir uns, dass am Anfang der Bewegung der Apparat um  $\eta_0$  von seiner Ruhelage abgelenkt und alsdann sich selbst überlassen ist; dann ergibt sich aus der Gleichung (204) bei Vernachlässigung von  $\tau$

$$\eta = \eta_0 \cos(nt) \dots\dots\dots(209)$$

und

$$\eta'' = -n^2 \eta_0 \cos(nt).$$

Wir sehen also, dass in erster Annäherung unser Apparat ganz wie ein einfaches Pendel in der Ebene der Aufhängedrähte schwingt und unabhängig von der Drehung des Systems ist, wobei die Periode dieser Schwingung  $\frac{2\pi}{n}$  genau mit derjenigen zusammenfällt, welche den Eigenschwingungen des Apparates (bei Abwesenheit der Drehung) senkrecht zur Drahtebene entspricht.

Dieser Ausdruck unterscheidet sich vom wahren nur durch Glieder höherer Ordnung, da aber in der Gleichung (205)  $\eta''$  noch mit  $\theta$  multipliziert ist, so können wir uns um so mehr mit dieser Annäherung begnügen.

Die Gleichung (205) nimmt also folgende Form an

$$\varphi = -\alpha_1 \theta \eta'' = \alpha_1 n^2 \eta_0 \cdot \theta \cos(nt).$$

Durch Vergleichung mit der Formel (208) findet man

$$\beta = \alpha_1 n^2 \eta_0, \dots\dots\dots(210)$$

$$\delta = 0$$

und es wird

$$\theta'' + n_1^2 \theta + \alpha_1 \xi'' = \beta \theta \cos(nt). \dots\dots\dots(211)$$

Es handelt sich jetzt also nur darum,  $\xi$  aus den Gleichungen (203) und (211) zu eliminieren.

Bringt man zu diesem Zweck den Werth von  $\xi''$  in die Gleichung (203) ein, so folgt

$$\xi = \frac{1}{n^2} \left[ -\alpha \theta'' + \frac{1}{\alpha_1} \{ \theta'' + n_1^2 \theta - \beta \theta \cos nt \} \right].$$

Daraus erhält man

$$\xi'' = \frac{1}{\alpha_1 n^2} \left[ -\omega^2 \theta'''' + \theta'''' + n_1^2 \theta'' - \beta \{ \theta'' \cos nt - 2n \theta' \sin nt - n^2 \theta \cos nt \} \right].$$

Führt man nun diesen Werth in der Gleichung (211) ein, so ergibt sich folgende definitive Differentialgleichung für  $\theta$  allein:

$$(1 - \omega^2) \theta'''' + [n^2 + n_1^2 - \beta \cos nt] \theta'' + 2\beta n \sin nt \theta' + n^2 n_1^2 \theta = 0.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung 4<sup>ter</sup> Ordnung liefert nun die Beziehung zwischen  $\theta$  und der Zeit  $t$ .

Die Behandlung dieser Gleichung bietet jedoch sehr grosse Schwierigkeiten dar, und wir wollen deshalb eine vereinfachende Voraussetzung einführen.

Wir haben schon früher gesehen, dass, wenn  $\omega^2$  klein ist, das Auftreten der Schwingungen  $\xi$  gewissermaassen als eine Störung der Drehungen  $\theta$  aufzufassen ist. Wollen wir also von dieser störenden Wirkung der Verschiebung  $\xi$  von jetzt an vollständig absehen. Dies ist selbstverständlich als eine erste Annäherung zu betrachten, aber es wäre leicht möglich diese Bedingung praktisch ganz streng durchzuführen. Dazu wäre nur nöthig durch irgend welche mechanische Vorrichtung die Schwingungen des Apparates parallel der  $x$ -Axe zu hemmen, d. h.  $\xi$  fortwährend gleich Null zu halten. Bei ruhender Unterlage würde dieses keine Abänderung der Bewegungsgesetze für  $\eta$  und  $\theta$  nach sich ziehen.

Dann würde  $\theta$  folgender Differentialgleichung genügen:

$$\theta'' + n_1^2 \theta = \beta \theta \cos nt \dots\dots\dots(212)$$

Bei meinen Versuchen mit dem früher erwähnten Modell war der Apparat vollständig frei, folglich war eine gewisse Rückwirkung der Verschiebungen  $\xi$  auf die Drehungen  $\theta$  vorhanden, aber wir wollen voraussetzen dass  $\xi$  und  $\xi''$  immer so klein bleiben, dass die Gleichung (212) noch anwendbar ist.

Hätte man strenger verfahren und den Einfluss der Verschiebungen mitberücksichtigen wollen, so würden die entsprechenden theoretischen Ausführungen immer noch eine erste Annäherung sein, da die ganze eben abgeleitete Theorie voraussetzt, dass  $\theta$  eine kleine Grösse ist, was aber bei den wirklichen Versuchen nicht der Fall war, da  $\theta$  nach Verlauf gewisser Zeiten recht beträchtliche Werthe erlangte.

Setzen wir also voraus, dass der Einfluss der Verschiebungen  $\xi$  äusserst klein ist, und dementsprechend wollen wir zur Intergration der Gleichung (212) übergehen.

Dazu geben wir zuerst der Gleichung (212) eine etwas andere Form.

Führen wir zu dem Zweck die Bezeichnungen ein:

$$u = \frac{n}{2} t \dots\dots\dots (213)$$

$$q = 2 \frac{n_1}{n} \dots\dots\dots (214)$$

$$q_1 = -\frac{2\beta}{n^2} \dots\dots\dots (215)$$

Dann geht unsere Gleichung in die folgende über:

$$\frac{d^2 \theta}{du^2} + \{q^2 + 2q_1 \cos 2u\} \cdot \theta = 0. \dots\dots\dots (216)$$

$\beta$  ist  $\eta_0$  proportional, folglich können wir  $q_1$  als sehr klein voraussetzen.

Die Gleichung (216) ist eine sehr bekannte, die in der Himmelsmechanik eine sehr wichtige Rolle spielt.

Ihre Integration ist bekanntlich ziemlich schwierig, aber für kleine Werthe von  $q_1$  ist sie von manchen Autoren gründlich untersucht worden.

Wir brauchen also nur an eine dieser Untersuchungen uns anzuschliessen.

Bevor wir es aber thun, wollen wir folgende Bemerkung vorausschicken.

Wir haben früher gesehen, dass die Rückwirkung der Verschiebungen auf die Drehungen unseres Apparates und umgekehrt, gewissermaassen als eine Störung der Hauptbewegung aufgefasst werden kann.

In diesem Fall sind wir aber auf eine wirkliche Störungsgleichung der Himmelsmechanik geführt worden.

Unser Modell kann also sehr gut dazu dienen, die Bewegung, welche dieser Differentialgleichung entspricht, zu versinnlichen.<sup>1)</sup>

Ich glaube auch, dass für Unterrichtszwecke der analytischen Mechanik das Modell als Illustrationsmittel für verschiedene Bewegungen, welche der früher abgeleiteten Differentialgleichung entsprechen, sehr gute Dienste leisten kann.

Beim Integrieren der Gleichung (216) wollen wir den von Tisserand in seiner «Traité de mécanique céleste»<sup>2)</sup> angegebenen Weg befolgen.

Derselbe besteht darin,  $\theta$  durch eine gewisse Cosinusreihe darzustellen, deren Coefficienten nach Potenzen von  $q_1$  geordnet sind.

Bedeutet nun  $C$  und  $\gamma$  gewisse Integrationsconstanten, so ergibt sich für  $\theta$  folgender ziemlich complicierter Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{C} = & \cos(hu + \gamma) + \\ & + \left[ \frac{q_1}{4(1+q)} - q_1^3 \frac{q^3 + 4q^2 + 15q + 16}{128q(1+q)^3(2+q)(1-q)} + \dots \right] \cos\{(h+2)u + \gamma\} \\ & + \left[ \frac{q_1}{4(1-q)} - q_1^3 \frac{q^3 - 4q^2 + 15q - 16}{128q(1-q)^3(2-q)(1+q)} + \dots \right] \cos\{(h-2)u + \gamma\} \\ & + \left[ \frac{q_1^2}{32(1+q)(2+q)} + \dots \right] \cos\{(h+4)u + \gamma\} \\ & + \left[ \frac{q_1^2}{32(1-q)(2-q)} + \dots \right] \cos\{(h-4)u + \gamma\} \\ & + \left[ \frac{q_1^3}{384(1+q)(2+q)(3+q)} + \dots \right] \cos\{(h+6)u + \gamma\} \\ & + \left[ \frac{q_1^3}{384(1-q)(2-q)(3-q)} + \dots \right] \cos\{(h-6)u + \gamma\} \\ & + \dots = f(u). \end{aligned} \dots\dots (217)$$

Hierin hat  $h$  folgende Bedeutung

$$h = q \left[ 1 + \frac{q_1^2}{4q^2(1-q^2)} - q_1^4 \frac{15q^4 - 35q^2 + 8}{64q^4(1-q^2)^3(4-q^2)} - \dots \right] \dots\dots (218)$$

<sup>1)</sup> Dazu muss man, streng genommen, die früher erwähnte Vorrichtung in Anwendung bringen, um  $\xi$  immer gleich Null zu halten.

<sup>2)</sup> Tome III. Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la lune, p. 1. Paris. Gauthier-Villars (1894).

Hat am Anfang der Bewegung der Apparat keinen Anstoss erhalten, so wird für  $t = 0$   $\theta' = 0$ , folglich wird auch

$$\gamma = 0.$$

Die andere Integrationsconstante  $C$  bestimmt sich aus der Bedingung, dass für  $t = 0$   $\theta = \theta_0$  wird.

Also

$$C = \frac{\theta_0}{f(0)}.$$

Wir haben daher

$$\theta = \theta_0 \frac{f(u)}{f(0)}. \dots\dots\dots(219)$$

Wir sehen also, dass  $\theta$  immer gleich Null bleibt, wenn am Anfang der Bewegung die Drehung  $\theta_0$  des Apparates wirklich streng gleich Null ist, folglich wird in diesem Fall der Apparat nur einfache Schwingungen in der Ebene der Aufhängedrähte ausführen, wie es ohne weiteres verständlich ist. Es ist aber praktisch nicht möglich,  $\theta_0$  genau gleich Null zu machen. Ist aber  $\theta_0$  von Null verschieden, möge es auch noch so klein sein, so wird  $\theta$  mit der Zeit sich ändern.

Wollen wir nun auf Grundlage der Formel (217)  $\theta$  durch unsere Constanten  $n^2$ ,  $n_1^2$ ,  $\beta$  und die Zeit  $t$  ausdrücken und uns dabei nur auf Glieder von der Ordnung  $\beta^2$  beschränken. Unter Berücksichtigung der früher eingeführten Bezeichnungen<sup>1)</sup> gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta}{C} = & \cos n_1 \left( 1 - \frac{\beta^2}{4n_1^2(4n_1^2 - n^2)} \right) t + \\ & + \beta \cdot \frac{1}{2n} \left[ \frac{1}{(2n_1 - n)} \cos(n_1 - n)t - \frac{1}{(2n_1 + n)} \cos(n_1 + n)t \right] \\ & + \beta^2 \frac{1}{8n^2} \left[ \frac{1}{(2n_1 - n)(2n_1 - 2n)} \cos(n_1 - 2n)t + \frac{1}{(2n_1 + n)(2n_1 + 2n)} \cos(n_1 + 2n)t \right]. \end{aligned} \right\} (220)$$

Hierin hat  $C$  folgende Bedeutung

$$C = \frac{\theta_0}{1 + \beta \frac{1}{4n_1^2 - n^2} + \beta^2 \frac{2n_1^2 + n^2}{8n^2(4n_1^2 - n^2)(n_1^2 - n^2)}}. \dots\dots\dots(221)$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (216) bietet manche interessante Specialfälle dar, auf deren Besprechung ich hier nicht eingehen kann.

<sup>1)</sup> Siehe die Formeln (213), (214) und (215).

## § 9.

### Theorie des freien Davison'schen Apparates bei bewegter Unterlage.

Wir haben im § 3 gesehen, dass der Versuch, die störende Wirkung der Verschiebungen (Schwingungen) durch Stützung des Apparates zu beseitigen, misslungen ist, da die Empfindlichkeit desselben dabei zu viel eingebüsst hat. Ich sah mich also genöthigt den Apparat ganz frei zu lassen und nach einem Mittel zu suchen, welches ermöglichte, nur die Drehungen allein zu registrieren, ganz unabhängig von irgend welchen Verschiebungen des Apparates. Dieses Ziel wurde durch die im § 4 beschriebene electromagnetische Vorrichtung erreicht. Nun trat eine neue Schwierigkeit auf. Es ergab sich, dass die Schwingungen des Apparates eine Rückwirkung auf die Drehungen desselben haben, wie dies durch die im § 5 entwickelte Theorie hinlänglich genug bewiesen ist. Nun aber zeigt zu gleicher Zeit dieselbe Theorie, dass es möglich ist, diese störende Rückwirkung der Verschiebungen beliebig klein zu machen.

Dazu muss die in der Differentialgleichung (116) vorkommende Grösse  $\alpha_1$  sehr klein gemacht werden. Nun ist aber  $\alpha_1$  nach der Formel (114) der Differenz  $\rho - \Delta$  proportional, wo  $\rho - \Delta$  die Entfernung der Drehungsaxe des Systems vom Schwerpunkte desselben bedeutet. Es handelt sich also nur darum,  $\rho - \Delta$  so klein wie möglich zu machen.

Nach der Formel (110) kann  $\rho - \Delta$  auf zweierlei Art sehr klein werden. Dazu muss entweder  $P_1$  oder  $P_2$  sehr klein gemacht werden<sup>1)</sup>, d. h. der Schwerpunkt des Systems muss möglichst nach dem Befestigungspunkte einer der beiden Drähte herangerückt werden.

Die mit einem der früher beschriebenen Modelle des Davison'schen Apparates (siehe die Fig. 33) ausgeführten Versuche haben in der That gezeigt, dass, je näher der Schwerpunkt des Systems einem der beiden Drähte liegt, desto kleiner die Drehung des Apparates bei einem einmaligen Anstoss parallel der  $x$ -Axe wird. Dieser Anstoss wurde durch eine kleine Verschiebung der Plattform ertheilt.

Es schien also, als ob die gestellte Aufgabe, nämlich die Registrierung der Neigungen mit Hilfe eines Davison'schen Apparates, endlich gelöst wäre, da die störende Wirkung der Verschiebungen desselben nach Belieben verkleinert werden konnte. Es traten aber neue und diesmal schon unüberwindliche Schwierigkeiten auf, welche mich zu dem Schluss geführt haben,

<sup>1)</sup> Selbstverständlich darf nicht  $a = b$  gesetzt werden.





folglich wird nach dem Lagrange'schen Princip

$$\frac{P}{g} [x'' + \xi'' + s\psi''] + \frac{P}{g} (\rho - \Delta) \theta'' = \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \dots \dots \dots (224)$$

$$K\theta'' + \frac{P}{g} (\rho - \Delta) [x'' + \xi'' + s\psi''] = \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (225)$$

Es handelt sich also nur darum,  $\left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right)$  und  $\left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$  zu berechnen.

Wollen wir dazu denselben Weg, wie früher, einschlagen.

Wir müssen zuerst die absoluten Coordinaten der oberen ( $C$  und  $D$ ) und der unteren Befestigungspunkte ( $A'$  und  $B'$ ) der Drähte bestimmen.

Behalten wir dieselben Bezeichnungen wie im § 5 bei, so bekommen wir ohne Schwierigkeit aus den Figuren (34) und (39) und auf Grund der Formeln (222) bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung folgende Ausdrücke für die Coordinaten dieser Punkte:

$$\begin{array}{l} C \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x + (s + a) \psi \\ Y_1 = D - \delta \\ Z_1 = s + a \end{array} \right. \quad D \left\{ \begin{array}{l} X_2 = x + (s + b) \psi^1) \\ Y_2 = D + \delta \\ Z_2 = s + b \end{array} \right. \\ \\ A' \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x + \xi + s\psi + (\delta + \rho) \theta \\ y'_1 = D - \delta + \eta_1 \\ z'_1 = s + \zeta_1 \end{array} \right. \quad B' \left\{ \begin{array}{l} x'_2 = x + \xi + s\psi - (\delta - \rho) \theta^2) \\ y'_2 = D + \delta + \eta_2 \\ z'_2 = s + \zeta_2. \end{array} \right. \end{array}$$

Daraus folgt bis auf Glieder höherer Ordnung für die verschiedenen Richtungscosinusse in Bezug auf die Axen  $x, y, z$ .

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha_1 = \frac{a\psi - \xi - (\delta + \rho)\theta^3)}{a} \\ \cos \beta_1 = 0 \\ \cos \gamma_1 = 1 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (226)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha_2 = \frac{b\psi - \xi + (\delta - \rho)\theta}{b} \\ \cos \beta_2 = 0 \\ \cos \gamma_2 = 1. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (227)$$

<sup>1)</sup> Siehe die Formeln (80) und (81).

<sup>2)</sup> Siehe die Formeln (82) und (83).

<sup>3)</sup> Siehe die Formeln (90), (91), (104) und (105).

Für eine Richtung  $T$ , welche senkrecht zu  $A'B'$  und zu der  $z$ -Axe ist, wird, wie leicht einzusehen ist, auch in diesem Falle

$$\cos \lambda = 1 \quad \text{und} \quad \cos \nu = 0.^1)$$

Es ist also bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) &= P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 \\ &= P\psi - \left( \frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b} \right) \xi - \left[ \frac{P_1}{a} (\delta + \rho) - \frac{P_2}{b} (\delta - \rho) \right] \theta. \end{aligned}$$

Nach den Gleichungen (97) und (98) wird das dritte in der eckigen Klammer stehende Glied gleich Null sein.

Es bleibt also

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) = P\psi - \left( \frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b} \right) \xi. \dots \dots \dots (228)$$

$\left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$  berechnet sich in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) &= P_1 [\cos \alpha_1 \cos \lambda + \cos \beta_1 \cos \mu + \cos \gamma_1 \cos \nu] [\delta + \rho] - \\ &\quad - P_2 [\cos \alpha_2 \cos \lambda + \cos \beta_2 \cos \mu + \cos \gamma_2 \cos \nu] [\delta - \rho] \\ &= P_1 \cos \alpha_1 [\delta + \rho] - P_2 \cos \alpha_2 [\delta - \rho] \\ &= [P_1 (\delta + \rho) - P_2 (\delta - \rho)] \psi - \left[ \frac{P_1}{a} (\delta + \rho) - \frac{P_2}{b} (\delta - \rho) \right] \xi \\ &\quad - \left[ \frac{P_1}{a} (\delta + \rho)^2 + \frac{P_2}{b} (\delta - \rho)^2 \right] \theta, \end{aligned}$$

oder, nach den Formeln (97) und (98) unter Berücksichtigung der Beziehung (99),

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 2\delta P_1 P_2 \frac{a-b}{aP_2 + bP_1} \cdot \psi - D\theta. \dots \dots \dots (229)$$

Bringt man nun die Werthe von  $\left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right)$  und  $\left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$  aus den Formeln (228) und (229) in die Gleichungen (224) und (225) ein, so ergeben sich bei Einführung der Bezeichnungen, welche durch die Gleichungen (111), (112),

<sup>1)</sup> Siehe die Formeln (92).

(113) und (114) festgestellt sind, folgende zwei Differentialgleichungen für die Bewegung unseres Apparates:

$$\xi'' + n^2 \xi + (x'' - g\psi) + s\psi'' + \alpha\theta'' = 0 \dots\dots\dots(230)$$

$$\theta'' + n_1^2 \theta + \alpha_1 (x'' - g\psi) + \alpha_1 (\xi'' + s\psi'') = 0 \dots\dots\dots(231)$$

oder, anders geschrieben,

$$\theta'' + n_1^2 \theta + \alpha_1 (x'' + \xi'') + \alpha_1 (s\psi'' - g\psi) = 0.^1) \dots\dots\dots(232)$$

Wollen wir nun diese beiden Gleichungen eine nach der anderen besprechen.

Die erste (230) zeigt, dass die Drehung des Apparates ( $\theta$ ) eine Rückwirkung auf die Verschiebung desselben ( $\xi$ ) hat. Diese Gleichung unterscheidet sich von der früher gefundenen (115) nur durch die Glieder  $x'' - g\psi + s\psi''$ , welche von der Bewegung der Unterlage unmittelbar abhängen.

Setzen wir nun voraus, dass beide Drähte gleich lang sind, also etwa

$$a = b = l,$$

so verwandelt sich unser Apparat in ein einfaches Verticalpendel, dessen Länge gleich  $l$  ist.

Dabei wird nach den Gleichungen (111) und (112)

$$n^2 = \frac{g}{l}$$

und

$$\alpha = 0,$$

folglich nimmt die Differentialgleichung der Bewegung eines Verticalpendels bei bewegter Unterlage folgende Form an

$$\xi'' + \frac{g}{l} \xi + (x'' - g\psi) + s\psi'' = 0. \dots\dots\dots(233)$$

Auf diese Formel werden wir in einem späteren Paragraphen nochmals zurückkommen.

<sup>1)</sup> Hätte man noch die Dämpfung mitberücksichtigen wollen, so wären nur in den Gleichungen (230) resp. (231) die Glieder  $2\varepsilon\xi'$  resp.  $2\varepsilon_1\theta'$  hinzuzufügen, wo  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  die entsprechenden Dämpfungsconstanten bedeuten.

Wenden wir uns jetzt der Gleichung (232) zu. Wir sehen, dass auch hier die Verschiebung des Apparates ( $\xi$ ) eine Rückwirkung auf die Drehung ( $\theta$ ) desselben ausübt. Diese Gleichung unterscheidet sich von der früher gefundenen (116) durch die Glieder  $\alpha_1 (x'' - g\psi + s\psi'')$ , welche von der Bewegung der Unterlage unmittelbar abhängen.

Ausserdem zeigt die Gleichung (232), wie wir es auch früher gesehen haben, dass man diesen Einfluss der Rückwirkung der Verschiebungen  $x'' + \xi''$  durch Verminderung von  $\alpha_1$  beliebig verkleinern und also praktisch ganz unschädlich machen kann, aber hier tritt eben die früher erwähnte Schwierigkeit auf.

Die Gleichung zeigt, dass  $\alpha_1$  als Factor nicht nur vor dem Gliede  $x'' + \xi''$ , sondern auch vor  $(s\psi'' - g\psi)$  auftritt.  $\psi$  ist aber eben die gesuchte Grösse. Hat man also, um die Wirkung der Verschiebungen zu beseitigen,  $\alpha_1$  sehr klein gemacht, so wird der Apparat höchst unempfindlich in Bezug auf die Aenderungen von  $\psi$  sein. Wäre sogar  $\alpha_1 = 0$ , so würde der Apparat überhaupt nicht die Neigungen registrieren können.

Wir sind also gezwungen den sehr trostlosen Schluss zu ziehen, dass der Davison'sche Apparat zum Zweck der Registrierung der Aenderungen der Neigungen  $\psi$  der Erdoberfläche bei dynamischen Vorgängen ein ganz werthloses Instrument ist.

Für statische Vorgänge dagegen, wo es sich nur darum handelt, die resultierende, zurückgebliebene Neigung der Erdoberfläche nach erfolgtem Erdbeben zu bestimmen, verhält sich die Sache ganz anders.

In diesem Fall müssen wir alle Derivierten in der Gleichung (232) gleich Null setzen. Dann gilt für die resultierende Drehung des Apparates

$$\theta = g \frac{\alpha_1}{n_1^2} \psi.$$

Setzt man hierin die Werthe von  $n_1^2$  und  $\alpha_1$  aus den Formeln (113) und (114) ein, so folgt

$$\theta = \frac{P(\rho - \Delta)}{D} \psi,$$

oder, mit Rücksicht auf die Beziehungen (110) und (99),

$$\theta = \frac{a-b}{2\delta} \psi. \dots\dots\dots(234)$$

Wir erhalten also die bekannte Gleichung des Davison'schen Apparates.

In diesem Fall kann also, durch Vermehrung der Differenz der Drahtlängen  $a-b$  und Verkleinerung des Abstandes  $2\delta$  derselben, die Empfindlichkeit des Apparates beliebig gross gemacht werden.

Zum Zweck der Bestimmung der resultierenden Neigung der Erdoberfläche erweist sich also das Davison'sche Pendel wegen seiner grossen Empfindlichkeit als ein vortreffliches Instrument, bei dynamischen Vorgängen dagegen, wo es sich darum handelt, die Aenderungen der Neigungen mit der Zeit zu erforschen, ist dasselbe ganz werthlos.

In meinem ersten Aufsatz «Ueber seismometrische Beobachtungen»<sup>1)</sup>, bei der Besprechung der nöthigen Ausstattung einer seismometrischen Station ersten Ranges, habe ich den Davison'schen Apparat zur Registrierung von Neigungen empfohlen, aber dabei im nächsten § 10 (Seite 162) ausdrücklich gesagt: «Es ist unbedingt nothwendig, ehe man zur Gründung einer seismometrischen Station nach dem eben besprochenen Plan herantritt, die verschiedenen, hier angegebenen Formeln einer sorgfältigen experimentellen Prüfung zu unterwerfen».

Nun haben aber diese experimentelle Prüfung und die an sie anknüpfenden theoretischen Auseinandersetzungen gezeigt, dass dieses Pendel für seismometrische Zwecke ein wenig brauchbares Instrument ist, folglich sah ich mich genöthigt auf dasselbe ganz zu verzichten, und mich nach anderen Methoden zur Registrierung der Neigungen umzusehen.

Diese neuen Methoden sind nun in den weiter folgenden Paragraphen dargelegt.

## § 10.

### Theorie des abgeänderten Davison'schen Apparates.

Wir haben eben gesehen, dass der Davison'sche Apparat in seiner gewöhnlichen Form, wegen der Rückwirkung der Verschiebungen auf die Drehungen desselben, ganz und gar zur Registrierung der Aenderungen der Neigungen der Erdoberfläche bei Erdbeben ungeeignet ist.

Wären die Drähte gleich lang gewählt, also  $a=b$ , so würde nach der Formel (110) der Schwerpunkt des Systems mit der Drehungsaxe zusammenfallen und  $\alpha$  und  $\alpha_1$  würden beide gleich Null sein<sup>2)</sup>. In diesem Fall würden

<sup>1)</sup> Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. Livraison 1, p. 160 (1902).

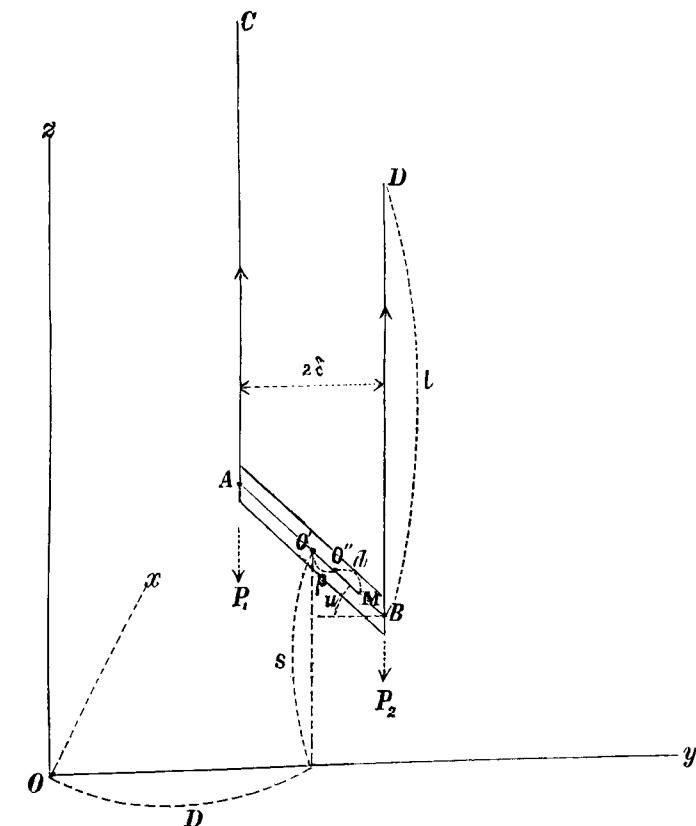
<sup>2)</sup> Siehe die Formeln (112) und (114).

die Verschiebungen (Schwingungen) des Apparates ganz unschädlich sein, aber nach der Gleichung (232) würde der Apparat auch nicht im Stande sein die Neigungen zu registrieren.

Es lässt sich jedoch eine solche Abänderung in der Construction treffen, bei welcher bei gleichen Drahtlängen der Apparat doch auf Neigungen reagirt.

Dazu braucht man nur die unteren Befestigungspunkte der Drähte auf verschiedene Höhen zu bringen.

Fig. 40.



Denken wir uns dementsprechend einen schräg geschnittenen Cylinder mit Hilfe zweier Drähte von gleicher Länge  $l$  so aufgehängt, dass die Axe des Cylinders den Winkel  $u$  mit der Horizontalebene bildet, wie dies auf der Fig. 40 schematisch angedeutet ist.

$l$  bedeutet die Länge der Drähte vom oberen Befestigungspunkt bis zur Axe des Cylinders.

Die Entfernung der Drähte von einander sei  $2\delta$  und die Länge des Cylinders

$$AB = 2L.$$

Sei weiter  $s$  die Erhebung der Mitte des Cylinders  $O'$  über der Horizontalebene  $xy$ .

Wegen der Einfachheit der Ableitung wollen wir fürs Erste voraussetzen, dass alle Massen längs der Axe des Cylinders concentrirt sind. Der Uebergang zum allgemeinen Fall lässt sich ohne Schwierigkeit durchführen.

Wollen wir zunächst die Lage der Drehungsaxe feststellen.

Das Gewicht des ganzen Systems sei  $P$ , wobei die Massen nicht gleichmässig längs der Linie  $AB$  vertheilt sein mögen, so dass der Schwerpunkt sich nicht in  $O'$  befindet, sondern etwa um  $\Delta$  längs der Linie  $AB$  von  $O'$  entfernt ist<sup>1)</sup>.

Die Spannungen der Drähte  $P_1$  und  $P_2$  berechnen sich nach den Formeln (77) und (78), wo, statt  $\Delta$ ,  $\Delta \cos u$  einzusetzen ist.

Es wird nämlich

$$P_1 = \frac{\delta - \Delta \cos u}{2\delta} P \dots \dots \dots (235)$$

$$P_2 = \frac{\delta + \Delta \cos u}{2\delta} P, \dots \dots \dots (236)$$

wo  $P_1 + P_2 = P$  ist.

Sei nun  $D$  die Entfernung des Punktes  $O'$  von der  $xz$  Ebene und führen wir noch folgende Bezeichnung ein

$$L \sin u = c, \dots \dots \dots (237)$$

dann erhalten wir für die Coordinaten der Punkte  $C, D, A$  und  $B$  bei ruhendem System folgende Ausdrücke:

$$\begin{array}{ll} C \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0 \\ Y_1 = D - \delta \\ Z_1 = s + c + l \end{array} \right. & D \left\{ \begin{array}{l} X_2 = 0^2) \\ Y_2 = D + \delta \\ Z_2 = s - c + l \end{array} \right. \\ \\ A \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = D - \delta \\ z_1 = s + c \end{array} \right. & B \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ y_2 = D + \delta \\ z_2 = s - c. \end{array} \right. \end{array}$$

<sup>1)</sup> Den Entfernungen von  $O'$  nach rechts wollen wir das Vorzeichen  $+$  beilegen.

<sup>2)</sup> Vergleiche die Formeln (80) und (81).

Sei nun bei ruhender Unterlage der Apparat etwas verschoben, wobei  $A$  sich etwa nach  $A'$  und  $B$  nach  $B'$  verschiebt, und bezeichnen wir die Coordinaten dieser beiden Punkte folgendermaassen:

$$A' \left\{ \begin{array}{l} x_1' = \xi_1 \\ y_1' = D - \delta + \eta_1 \\ z_1' = s + c + \zeta_1 \end{array} \right\} \dots (238) \quad B' \left\{ \begin{array}{l} x_2' = \xi_2^{1)} \\ y_2' = D + \delta + \eta_2 \\ z_2' = s - c + \zeta_2. \end{array} \right\} \dots (239)$$

Hierin bedeuten  $\xi_1, \xi_2, \eta_1$  und  $\eta_2$  sehr kleine Grössen. Nach den Formeln (84) und (85) werden  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  kleine Grössen höherer Ordnung sein, folglich brauchen wir bei dieser Untersuchung, wo wir uns nur auf Glieder niedrigster Ordnung beschränken, die Aenderung der dritten Coordinate  $z$  gar nicht zu berücksichtigen.

Bezeichnen wir nun die Winkel, welche die Richtung  $A'B'$  mit den Coordinatenaxen bildet resp. durch  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ , dann ergibt sich mit Berücksichtigung der Beziehung (237)

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \cos u \cdot \frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \\ \cos \beta = \cos u \left[ 1 + \sin^2 u \cdot \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\delta} \right] \\ \cos \gamma = -\sin u \left[ 1 - \cos^2 u \cdot \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\delta} \right]. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (240)$$

Sei nun  $T$  (siehe die Fig. 35) eine Richtung, welche senkrecht zu der  $z$ -Axe und zu  $A'B'$  und nach der Seite der positiven  $x$  gerichtet ist, und bedeuten  $\lambda, \mu$  und  $\nu$  die Winkel, welche diese Richtung  $T$  mit den Coordinatenaxen bildet, so erhält man in ähnlicher Weise wie früher (siehe § 5) bei Beibehaltung nur der Glieder niedrigster Ordnung

$$\left. \begin{array}{l} \cos \lambda = 1 \\ \cos \mu = -\frac{\xi_2 - \xi_1}{2\delta} \\ \cos \nu = 0. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (241)$$

Seien ferner  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  die Winkel, welche die Richtung  $A'C$  mit den Coordinatenaxen einschliesst und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  die entsprechenden Grössen für

<sup>3)</sup> Vergleiche die Formeln (82) und (83).

die Richtung  $B'D$ , so gelten analog dem Früheren (siehe § 5) die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= -\frac{\xi_1}{l} \\ \cos \beta_1 &= -\frac{\eta_1}{l} \\ \cos \gamma_1 &= 1. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (242)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_2 &= -\frac{\xi_2}{l} \\ \cos \beta_2 &= -\frac{\eta_2}{l} \\ \cos \gamma_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (243)$$

Wollen wir nun die Lage der Drehungsaxe  $O''$  aufsuchen, wobei  $\rho$  die Entfernung derselben vom Punkte  $O'$  (siehe die Fig. 40) sei.

Zu diesem Zweck denken wir uns nur eine Drehung des Apparates vorhanden. Dann muss beim Gleichgewicht

$$P_1 [\cos \alpha_1 \cos \lambda + \cos \beta_1 \cos \mu + \cos \gamma_1 \cos \nu] + P_2 [\cos \alpha_2 \cos \lambda + \cos \beta_2 \cos \mu + \cos \gamma_2 \cos \nu] = 0$$

sein.

Auf Grund der Gleichungen (241), (242) und (243) folgt

$$P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 = 0. \dots\dots\dots (244)$$

Aus der Fig. (35) ergibt sich wie früher, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung,

$$\theta = \frac{\xi_1}{\delta + \rho \cos u} = \frac{-\xi_2}{\delta - \rho \cos u} \quad ^1), \dots\dots\dots (245)$$

oder

$$\rho \cos u = \delta \frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung (244) erhält man

$$\rho \cos u = \delta \frac{P_2 - P_1}{P}. \dots\dots\dots (246)$$

<sup>1)</sup> Vergleiche die Formel (94).

Aus den Beziehungen (235) und (236) folgern wir nun

$$\Delta \cos u = \delta \frac{P_2 - P_1}{P}.$$

Durch Vergleich mit der Gleichung (246) ergibt sich

$$\rho - \Delta = 0. \dots\dots\dots (247)$$

Wir sehen also, dass die Drehungsaxe in diesem Falle immer mit dem Schwerpunkte des Systems zusammenfällt, folglich ist à priori zu erwarten, dass die Verschiebungen des Systems keinen Einfluss auf die Drehung desselben haben werden.

Wollen wir nun das Drehungsmoment  $\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$  unseres Systems berechnen. Es wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) &= P_1 [\cos \alpha_1 \cos \lambda + \cos \beta_1 \cos \mu + \cos \gamma_1 \cos \nu] [\delta + \rho \cos u] \\ &\quad - P_2 [\cos \alpha_2 \cos \lambda + \cos \beta_2 \cos \mu + \cos \gamma_2 \cos \nu] [\delta - \rho \cos u]. \end{aligned}$$

Daraus leitet sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (241), (242), (243) und (245) ab

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{l} [P_1 (\delta + \rho \cos u)^2 + P_2 (\delta - \rho \cos u)^2] \cdot \theta,$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichung (246),

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = -\frac{4\delta^2}{l} \cdot \frac{P_1 P_2}{P} \cdot \theta,$$

oder

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = -D\theta,$$

wenn

$$D = \frac{4\delta^2}{l} \cdot \frac{P_1 P_2}{P} \dots\dots\dots (248)$$

gesetzt wird.

Im Falle, dass der Schwerpunkt des Systems in der Mitte des Cylinders in  $O'$  sich befindet, wird

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$$

und  $D$  nimmt alsdann folgende Form an

$$D = \frac{\delta^2}{l} \cdot P.$$

Dies ist die bekannte Gleichung des gewöhnlichen Biflars.

Nachdem die Lage der Drehungsaxe festgestellt ist, wollen wir nun voraussetzen, dass die Unterlage des Systems sich in Bewegung befindet und sei dieselbe zur Zeit  $t$  um  $x$  parallel der  $x$ -Axe verschoben und um den Winkel  $\psi$  um die  $y$ -Axe gedreht.

Denken wir uns ein im Raume festes rechtwinkliges Coordinatensystem  $x, y, z$  und ein anderes System  $\xi, \eta, \zeta$ , welches mit dem Apparat fest verbunden ist. Bei normaler Stellung der Unterlage fallen beide Systeme zusammen.

Seien nun

$$\xi \text{ und } D + \rho \cos u + \eta$$

die relativen Coordinaten des Punktes  $O''$  (siehe die Fig. 40) zur Zeit  $t$ .

Dann erhalten die absoluten Coordinaten  $X$  und  $Y$  dieses Punktes folgendes Aussehen (siehe auch die Fig. 39 und 40):

$$X = x + \xi + (s - \rho \sin u) \psi$$

$$Y = D + \rho \cos u + \eta.$$

Die Aenderung der dritten Coordinate brauchen wir nicht zu berücksichtigen.

Nehmen wir weiter einen Massenpunkt  $M$  auf der Axe  $AB$  in der Entfernung  $d$  von  $O''$  an, und seien  $x_m$  und  $y_m$  die entsprechenden Coordinaten dieses Punktes.

Dieselben drücken sich (siehe die Fig. 37, 39 und 40) bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung folgendermaassen aus:

$$x_m = x + \xi + (s - (\rho + d) \sin u) \psi - d \cos u \cdot \theta$$

$$y_m = D + \rho \cos u + \eta + d \cos u.$$

Daraus bekommt man für das Quadrat der Geschwindigkeit  $v$  des Punktes  $M$

$$\begin{aligned} v^2 &= [x' + \xi' + (s - (\rho + d) \sin u) \psi' - d \cos u \theta']^2 + \eta'^2 \\ &= [x' + \xi' + (s - (\rho + d) \sin u) \psi']^2 + \eta'^2 + (d \cos u)^2 \theta'^2 - \\ &\quad - 2d \cos u [x' + \xi' + (s - (\rho + d) \sin u) \psi'] \theta', \end{aligned}$$

und für die lebendige Kraft  $T$  des Systems

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{P}{g} [x' + \xi' + (s - \rho \sin u) \psi']^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \eta'^2 + \frac{1}{2} K [\theta'^2 + \operatorname{tg}^2 u \cdot \psi'^2 + 2 \operatorname{tg} u \psi' \theta'] + \\ &\quad + \frac{P}{g} (\rho - \Delta) \cos u [x' + \xi' + (s - \rho \sin u) \psi'] [\theta' + \operatorname{tg} u \psi']. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet  $K$  das Drehungsmoment des Systems in Bezug auf die Drehungsaxe.

Mit Rücksicht auf die Beziehung (247) erhält man folgenden definitiven Ausdruck für  $T$ :

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{P}{g} [x' + \xi' + (s - \rho \sin u) \psi']^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \eta'^2 + \frac{1}{2} K [\theta'^2 + \operatorname{tg}^2 u \cdot \psi'^2 + 2 \operatorname{tg} u \psi' \theta']. \end{aligned} \right\} \dots (249)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'} = \frac{P}{g} [x' + \xi' + (s - \rho \sin u) \psi']$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta'} = \frac{P}{g} \eta'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = K [\theta' + \operatorname{tg} u \cdot \psi'].$$

Durch Anwendung des Lagrange'schen Principes erhält man

$$\frac{P}{g} [x'' + \xi'' + (s - \rho \sin u) \psi''] = \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \dots (250)$$

$$\frac{P}{g} \eta'' = \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \dots (251)$$

$$K [\theta'' + \operatorname{tg} u \cdot \psi''] = \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \dots (252)$$

Es handelt sich also nur noch darum  $\left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right)$ ,  $\left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)$  und  $\left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$  zu berechnen.

Wollen wir zu dem Zweck die absoluten Coordinaten der oberen ( $C$  und  $D$ ) und der unteren Befestigungspunkte ( $A'$  und  $B'$ ) der Drähte bestimmen.

Es ist in ähnlicher Weise, wie in § 9, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$C \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x + (s + c + l) \psi \\ Y_1 = D - \delta \\ Z_1 = s + c + l \end{array} \right\} \dots \dots \dots (253)$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} X_2 = x + (s - c + l) \psi \\ Y_2 = D + \delta \\ Z_2 = s - c + l \end{array} \right\} \dots \dots \dots (254)$$

$$A' \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x + \xi + (s + c) \psi + (\delta + \rho \cos u) \theta \\ y'_1 = D - \delta + \eta \\ z'_1 = s + c + \zeta_1 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (255)$$

$$B' \left\{ \begin{array}{l} x'_2 = x + \xi + (s - c) \psi - (\delta - \rho \cos u) \theta \\ y'_2 = D + \delta + \eta \\ z'_2 = s - c + \zeta_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (256)$$

Daraus ergibt sich bis auf Glieder höherer Ordnung für die verschiedenen Richtungscosinus in Bezug auf die Axen  $x, y, z$ , bei Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha_1 = \frac{l\psi - \xi - (\delta + \rho \cos u) \theta}{l} \\ \cos \beta_1 = -\frac{\eta}{l} \\ \cos \gamma_1 = 1. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (257)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha_2 = \frac{l\psi - \xi + (\delta - \rho \cos u) \theta}{l} \\ \cos \beta_2 = -\frac{\eta}{l} \\ \cos \gamma_2 = 1. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (258)$$

Seien  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel, welche die Richtung  $A'B'$  mit den Coordinatenaxen  $x, y, z$  bildet, so ist auf Grund der Formeln (255) und (256)

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = -[\sin u \cdot \psi + \cos u \cdot \theta] \\ \cos \beta = \cos u \\ \cos \gamma = -\sin u. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (259)$$

Ist  $T$  eine Richtung, welche senkrecht zu  $A'B'$  und zu der  $z$ -Axe steht, so werden die entsprechenden Richtungscosinus

$$\left. \begin{array}{l} \cos \lambda = 1 \\ \cos \mu = \theta + \operatorname{tg} u \cdot \psi \\ \cos \nu = 0. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (260)$$

Auf Grund der Gleichungen (257), (258) und (260) bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung kann man schreiben

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) &= P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 \\ &= \frac{1}{l} [P_1 \{l\psi - \xi - (\delta + \rho \cos u) \theta\} + \\ &\quad + P_2 \{l\psi - \xi + (\delta - \rho \cos u) \theta\}], \end{aligned}$$

oder, mit Berücksichtigung der Beziehung (246),

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) = P\psi - P \frac{\xi}{l}. \dots \dots \dots (261)$$

In ähnlicher Weise gilt

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 = -P \frac{\eta}{l}. \dots \dots \dots (262)$$

und

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) &= P_1 [\cos \alpha_1 \cos \lambda + \cos \beta_1 \cos \mu + \cos \gamma_1 \cos \nu] [\delta + \rho \cos u] \\ &\quad - P_2 [\cos \alpha_2 \cos \lambda + \cos \beta_2 \cos \mu + \cos \gamma_2 \cos \nu] [\delta - \rho \cos u] \\ &= \frac{P_1}{l} [l\psi - \xi - (\delta + \rho \cos u) \theta] [\delta + \rho \cos u] \\ &\quad - \frac{P_2}{l} [l\psi - \xi + (\delta - \rho \cos u) \theta] [\delta - \rho \cos u], \end{aligned}$$

oder, mit Berücksichtigung der Beziehung (246),

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = -D\theta, \dots\dots\dots(263)$$

wo  $D$  aus der Formel (248) zu entnehmen ist.

Setzt man nun die Werthe aus den Formeln (261), (262) und (263) resp. in die Gleichungen (250), (251) und (252) ein, und ersetzt dabei  $\rho$  durch seinen Werth aus der Formel (246), so erhält man folgende drei Differentialgleichungen für die Bewegung unseres Apparates

$$\xi'' + \frac{g}{l}\xi + (x'' - g\psi) + \left\{s - \delta \frac{P_2 - P_1}{P} \operatorname{tg} u\right\} \psi'' = 0 \dots(264)$$

$$\eta'' + \frac{g}{l}\eta = 0 \dots\dots\dots(265)$$

$$\theta'' + n^2\theta + \operatorname{tg} u \cdot \psi'' = 0, \dots\dots\dots(266)$$

worin

$$n^2 = \frac{D}{K} \dots\dots\dots(267)$$

ist.

Wir sehen also, dass alle drei Bewegungsarten unseres Instrumentes ganz unabhängig von einander sich vollziehen, folglich ist eine Rückwirkung einer Bewegung auf die andere völlig ausgeschlossen. Ausserdem ist aus der Gleichung (266) ersichtlich, dass der Drehungswinkel  $\theta$  in unmittelbarem Zusammenhang mit der Neigung  $\psi$  steht, folglich kann dieser Apparat sich zu Beobachtungszwecken über Neigungen sehr gut eignen.

Wollen wir nun diese drei Differentialgleichungen der Reihe nach etwas näher besprechen.

Wollen wir mit der ersten derselben (Formel 264) anfangen.

Dieselbe entspricht der Bewegung eines einfachen Verticalpendels, wobei das Glied

$$s - \delta \frac{P_2 - P_1}{P} \operatorname{tg} u$$

die Erhebung des Schwerpunktes des Systems über der  $xy$ -Ebene bedeutet.

Sind die Massen gleichmässig längs der Linie  $AB$  vertheilt, so fällt der Schwerpunkt mit der Mitte von  $AB$  zusammen und es wird

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$$

und

$$\xi'' + \frac{g}{l}\xi + (x'' - g\psi) + s\psi'' = 0. \dots\dots\dots(268)$$

Eine ganz ähnliche Gleichung haben wir auch früher erhalten. (Siehe die Formel 233).

Ist die Unterlage in Ruhe, so vereinfacht sich diese Gleichung in die folgende

$$\xi'' + \frac{g}{l}\xi = 0. \dots\dots\dots(269)$$

Dies ist die gewöhnliche Gleichung eines Verticalpendels von der Länge  $l$ .

Die in den Gleichungen (268) und (269) vorkommende Grösse  $l$  beansprucht noch eine kleine Correction.

Wir haben nämlich bei unseren theoretischen Entwicklungen vorausgesetzt, dass alle Massen längs der Linie  $AB$  concentrirt sind. In Wirklichkeit aber haben wir einen schräg geschnittenen homogenen Cylinder. Sei der Radius des kreisförmigen Querschnittes dieses Cylinders  $R$ . Jeder Schnitt des Cylinders parallel der  $xz$ -Ebene ist eine Ellipse, deren grössere Halbaxe

$$a = \frac{R}{\cos u} \dots\dots\dots(270)$$

und die kleinere

$$b = R \dots\dots\dots(271)$$

wird.

Die Schwingungsperiode unseres Apparates entspricht der Schwingungsperiode eines homogenen elliptischen Discus, dessen Centrum um  $l$  von der entsprechenden Drehungsaxe entfernt ist.

Folglich muss man in den beiden früheren Gleichungen (268) und (269) unter  $l$  die reducierte Länge unseres Apparates verstehen.

Bezeichnen wir diese reducierte Länge durch  $l_1$  und bedeute  $l$  wie früher die Entfernung  $AC=BD$  (siehe die Fig. 40), so muss in den beiden früheren Gleichungen  $l$  durch  $l_1$  ersetzt werden.

Wollen wir nun  $l_1$  bestimmen.

Bedeute  $k_1$  das Trägheitsmoment eines elliptischen Discus in Bezug auf eine Gerade, welche durch das Centrum des Discus geht und senkrecht zur Ebene desselben steht, so wird bekanntlich, wenn  $m$  die Masse bedeutet,

$$l_1 = l \left(1 + \frac{k_1}{ml^2}\right). \dots\dots\dots(272)$$

Es handelt sich also nur darum  $k_1$  zu berechnen.

Zu diesem Zweck denken wir uns den Anfangspunkt unseres rechtwinkligen Coordinatensystems  $x, y, z$  in das Centrum dieses elliptischen



Schnittes verlegt. Die Gleichung dieser Ellipse nimmt dann folgende Form an

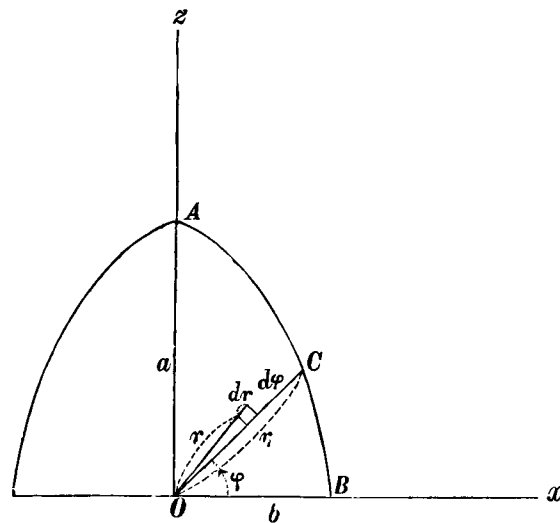
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \dots\dots\dots(273)$$

Die Dicke des schrägen elliptischen Discus sei  $\Delta h$ , wo  $\Delta h$  eine unendlich kleine Grösse ist und sei noch  $\sigma$  die entsprechende Massendichtigkeit.

Dann wird

$$m = \pi ab \cdot \Delta h \cdot \sigma = \pi R^2 \cdot \Delta h \cdot \sigma \cdot \frac{1}{\cos u}. \dots\dots\dots(274)$$

Fig. 41.



Aus der Figur (41) ersieht man ohne Weiteres, dass

$$d^2 k_1 = \sigma \cdot \Delta h \cdot r^3 dr d\varphi,$$

oder

$$dk_1 = \sigma \cdot \Delta h \cdot \frac{r_1^4}{4} d\varphi$$

ist.

$r_1$  ist eine Function von  $\varphi$ ; dieselbe berechnet sich aus der Gleichung der Ellipse. Führen wir zu diesem Zweck die Excentricität  $e$  der Ellipse ein.

Es wird

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

oder, nach den Gleichungen (270) und (271),

$$e^2 = \sin^2 u. \dots\dots\dots(275)$$

Es wird ferner

$$b^2 = a^2 (1 - e^2)$$

und

$$ab = a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{R^2}{\cos u}. \dots\dots\dots(276)$$

Nun ist

$$x = r_1 \cos \varphi$$

$$z = r_1 \sin \varphi,$$

also

$$r_1^2 = \frac{R^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \dots\dots\dots(277)$$

Wir erhalten den folgenden Ausdruck für  $k_1$ :

$$k_1 = \frac{1}{4} \sigma \cdot \Delta h \cdot R^4 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}. \dots\dots\dots(278)$$

Man findet durch passende Transformationen für das unbestimmte Integral des vorigen Ausdruckes

$$\int \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^2} \left[ \frac{2 - e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \arctg(\sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi) - e^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right] + \text{Const.},$$

also

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \pi \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{2 - e^2}{1 - e^2} = \frac{\pi}{\cos u} \cdot \frac{2 - \sin^2 u}{\cos^2 u}.$$

Bringt man diesen Ausdruck in die Gleichung (278) ein und berücksichtigt dabei die Beziehung (274), so folgt, wenn

$$\mu = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\cos^2 u} \right] \dots\dots\dots(279)$$

gesetzt wird,

$$k_1 = \frac{1}{2} \mu m R^2,$$

also, nach der Gleichung (272),

$$l_1 = l \left( 1 + \frac{1}{2} \mu \frac{R_2^2}{l^2} \right). \dots\dots\dots(280)$$

Die reducierte Länge  $l_1$  unseres Pendels hängt also von der Neigung  $u$  unseres Cylinders ab.

Ist  $u = 0$ , so haben wir einen Kreisschnitt und es wird  $\mu = 1$ .  
Mit wachsendem  $u$  nimmt  $\mu$  zu.  
Es mögen hier einige Werthe von  $\mu$  angegeben werden.

$u$	$\mu$
$0^\circ$	1
$15^\circ$	$\frac{1}{2} [9 - 4\sqrt{3}] = 1,036$
$30^\circ$	$\frac{7}{6} = 1,167$
$45^\circ$	$\frac{3}{2} = 1,500$
$60^\circ$	$\frac{5}{2} = 2,500$
$75^\circ$	$\frac{1}{2} [9 + 4\sqrt{3}] = 7,964$

Der durch die Gleichung (280) gegebene Werth von  $l_1$  ist also in den Gleichungen (268) und (269) statt  $l$  einzusetzen.

Wenden wir uns jetzt zu der zweiten unserer Differentialgleichungen (Formel (265)).

Die Bewegung des Apparates parallel der  $y$ -Axe ist unabhängig von der vorausgesetzten Bewegung der Unterlage. Sie besteht aus einfachen Sinusschwingungen, wobei die in der Formel vorkommende Grösse  $l$  ebenfalls einer kleinen Correction bedarf.

Es muss aus demselben Grunde, wie früher, statt  $l$  die reducierte Länge  $l_2$  eingesetzt werden, wo

$$l_2 = l \left( 1 + \frac{k_2}{m l^2} \right) \dots \dots \dots (281)$$

ist.

Hierin bedeutet  $k_2$  das Trägheitsmoment unseres elliptischen Schnittes in Bezug auf die kleinere Axe der Ellipse.

Man erhält in ähnlicher Weise, wie früher

$$k_2 = \frac{1}{4} \sigma \Delta h R^4 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} \dots \dots \dots (282)$$

Das unbestimmte Integral wird gleich

$$\int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{1 - e^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi) - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right] + \text{Const.},$$

also

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \pi \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{1}{1 - e^2} = \frac{\pi}{\cos u} \cdot \frac{1}{\cos^2 u}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (282) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Beziehung (274)

$$k_2 = \frac{1}{4} m R^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 u}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (281) ein, so drückt sich die reducierte Länge unseres Pendels bei Schwingungen parallel der  $y$ -Axe folgendermaassen aus

$$l_2 = l \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \right) \dots \dots \dots (283)$$

Gehen wir jetzt zu der Betrachtung der dritten unserer Differentialgleichungen für  $\theta$  (siehe Formel 266) über.

Dieser Gleichung kommt die Hauptbedeutung zu, da sie uns den Zusammenhang zwischen der Neigung  $\psi$  und der Drehung  $\theta$  des Apparates angiebt. Wollen wir aber diese Gleichung zuerst durch Einführung der Dämpfung vervollständigen und dementsprechend sie in folgender Form schreiben

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \operatorname{tg} u \cdot \psi'' = 0. \dots \dots \dots (284)$$

Denken wir uns nun, dass das Erdbeben verlaufen und eine resultierende Neigung  $\psi$  entstanden ist. Dann müssen wir  $\theta''$  und  $\theta'$  gleich Null setzen und erhalten einfach

$$\theta = 0. \dots \dots \dots (285)$$

Wir sehen also, dass dieses Instrument nicht im Stande ist die resultierende, zurückgebliebene Neigung anzuzeigen, aber es bietet, im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Davison'schen Apparat, den grossen Vortheil, dass es für dynamische Vorgänge anwendbar ist, nämlich dort, wo die Neigung  $\psi$  fortwährenden Aenderungen ausgesetzt ist und wo der gewöhnliche Davison'sche Apparat nicht mehr zu gebrauchen ist.

Wir sehen also, dass mit Hilfe dieses Apparates die Möglichkeit geboten ist, die Neigungen der Erdoberfläche allein zu registrieren und zwar ganz unabhängig und frei von dem Einflusse irgend welcher Verschiebungen.

Dies ist wohl eine Lösung der gestellten Aufgabe.

Wollen wir nun, wie früher, den Specialfall betrachten, wo  $\psi$  sich periodisch mit der Zeit ändert, etwa nach dem Gesetze

$$\psi = \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma), \dots\dots\dots(286)$$

wo  $\psi_0$  die maximale Amplitude und  $\gamma$  die anfängliche Phase bedeutet.

Die entsprechende Periode dieser Bewegung sei  $T_1$  und die Periode der Eigenbewegung des Apparates bei Abwesenheit der Dämpfung  $T$ .

Dann wird

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{n_1} \\ T &= \frac{2\pi}{n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(287)$$

Um die Eigenbewegung des Apparates möglichst zu eliminieren, ist es wiederum zweckmässig  $\varepsilon > n$  zu wählen.

Setzen wir also

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \varepsilon + \alpha \\ \mu_2 &= \varepsilon - \alpha \\ \text{und} \\ \alpha &= +\sqrt{\varepsilon^2 - n^2}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(288)$$

so ergibt sich für das allgemeine Integral der Gleichung (284) bei Zugrundelegung der Gleichung (286)

$$\theta = \Gamma_1 e^{-\mu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\mu_2 t} - \frac{n_1^2}{\sqrt{R}} \operatorname{tg} u \cdot \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma + \Delta) \dots\dots(289)$$

Hierin bedeuten:

$\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  zwei Integrationsconstanten.

$$\left. \begin{aligned} R &= (n_1^2 + \mu_1^2)(n_1^2 + \mu_2^2) \\ \operatorname{tg} \Delta &= \frac{2\varepsilon n_1}{n_1^2 - n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(290)$$

Die beiden ersten Glieder in dem Ausdrucke für  $\theta$  verschwinden schon bei sehr kleinen Werthen von  $t$ , folglich brauchen wir sie gar nicht zu berücksichtigen.

Setzen wir weiter

$$\mathfrak{A} = -\frac{n_1^2}{\sqrt{R}} \operatorname{tg} u, \dots\dots\dots(291)$$

so wird für nicht zu kleine Werthe von  $t$

$$\theta = \mathfrak{A} \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma + \Delta) \dots\dots\dots(292)$$

Diese Formel zeigt uns, dass es wirklich möglich ist mit Hilfe dieses Apparates die Aenderungen der Neigungen zu registrieren. Die Empfindlichkeit der Registrierung hängt unmittelbar vom Betrage von  $\mathfrak{A}$  ab.

Bei gegebenen Werthen der Constanten  $\varepsilon, n$  und  $n_1$  ist  $\mathfrak{A}$  zu  $\operatorname{tg} u$  proportional, folglich sehen wir, dass  $\operatorname{tg} u$  als Maass der Empfindlichkeit des Instrumentes auftritt.

Nehmen wir noch den folgenden Specialfall an, welcher bei meinen Versuchen mit dem Horizontalpendel fast immer stattfand; setzen wir nämlich

$$\varepsilon = n.$$

Dann wird

$$R = (n_1^2 + n^2)^2$$

und

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{2nn_1}{n_1^2 - n^2}.$$

Es ergibt sich also

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{1 + \frac{n^2}{n_1^2}} \operatorname{tg} u \dots\dots\dots(293)$$

oder, nach den Formeln (287),

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{1 + \frac{T_1^2}{T^2}} \operatorname{tg} u \dots\dots\dots(294)$$

Ist also  $\left(\frac{T_1}{T}\right)^2$  sehr klein, so können wir mit hinreichender Genauigkeit setzen

$$\mathfrak{A} = -\operatorname{tg} u.$$

In diesem Fall wird, wie leicht einzusehen ist,  $\Delta$  sich wenig von 0 unterscheiden.

Wollen wir nun den Ausdruck für  $n^2$  bilden.

In der Formel (267) für  $n^2$  ist  $D$  bekannt.

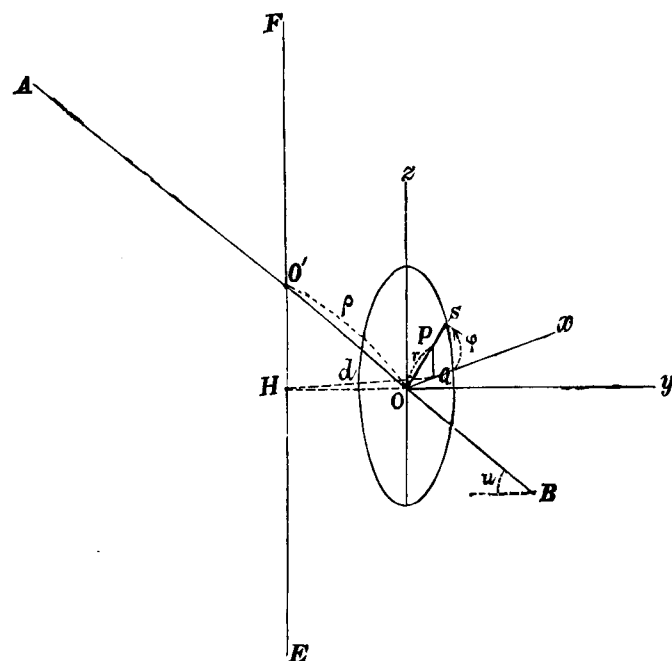
Es handelt sich also nur darum  $K$  auszurechnen.

Setzen wir voraus, dass die Massen wiederum gleichmässig vertheilt sind, also  $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$ .

Dann bedeutet  $K$  das Trägheitsmoment des schräg geschnittenen Cylinders in Bezug auf eine Axe, welche durch die Mitte des Cylinders hindurchgeht ( $O'$  siehe die Fig. 40) und zu der  $z$ -Axe parallel ist.

Sei nun auf der Figur (42)  $AB$  die Axe unseres Cylinders,  $O'$  die Mitte desselben und  $EF$  die Axe, in Bezug auf welche  $K$  bestimmt werden soll.

Fig. 42.



Nehmen wir wiederum einen elliptischen Schnitt des Cylinders, und sei die Entfernung des Mittelpunktes dieser Ellipse  $O$  von  $O'$  gleich  $\rho$ .

Die Entfernung des Punktes  $P$  von der Drehungsaxe wird  $HQ = d$ .

Ist  $OP = r$ , so wird

$$d^2 = \rho^2 \cos^2 u + r^2 \cos^2 \varphi.$$

Die Masse  $dm$  eines Volumelementes um den Punkt  $P$  wird

$$dm = \sigma r \cos u dr d\varphi d\rho.$$

Also

$$d^3 K = \sigma r \cos u [\rho^2 \cos^2 u + r^2 \cos^2 \varphi] dr d\varphi d\rho.$$

Ist  $OS = r_1$ , so ergibt sich nach einmaliger Integration nach  $r$ ,

$$d^2 K = \frac{1}{2} \sigma \cos u \left[ \rho^2 \cos^2 u r_1^2 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi r_1^4 \right] d\varphi d\rho.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (277) folgt bei einer weiteren Integration nach  $\varphi$

$$dK = \frac{1}{2} \sigma \cos u R^2 \cdot d\rho \left[ \rho^2 \cos^2 u \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} + \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} \right].$$

Durch passende Transformationen findet man für die entsprechenden unbestimmten Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi) + \text{Const.},$$

$$\int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi) + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right] + \text{Const.},$$

folglich wird

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Bringt man diese Ausdrücke in die vorige Gleichung ein und integriert dieselbe nach  $\rho$  zwischen den Grenzen  $-L$  und  $+L$ , wo  $2L$  die Länge des ganzen Cylinders bedeutet, so ergibt sich

$$K = \pi \sigma R^2 2L \left[ \cos^2 u \frac{(2L)^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right].$$

Mit Rücksicht auf die früheren Beziehungen ist die Masse  $M$  des ganzen Cylinders

$$M = \pi \sigma R^2 \cdot 2L,$$

folglich wird

$$K = M \left[ \frac{R^2}{4} + \cos^2 u \frac{L^2}{3} \right].$$

Aus der Formel (248) folgt weiter für  $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$

$$D = \frac{\delta^2}{l} P = \frac{L^2}{l} \cos^2 u \cdot Mg. ^1)$$

Wir erhalten also nach der Gleichung (267)

$$n^2 = 3 \frac{g}{l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 u}} \dots\dots\dots (295)$$

Ist  $\frac{R}{L}$  klein, so kann man für nicht zu grosse Werthe von  $u$  das zweite Glied im Nenner des vorigen Ausdruckes vernachlässigen.

Es wird also

$$n^2 = 3 \frac{g}{l}.$$

In diesem Falle wird  $n^2$  ganz unabhängig von der Entfernung der Drähte  $2\delta$  sein.

Bedeute nun noch  $T_0$  die Periode der Schwingung unseres Apparates parallel der  $\xi$ -Axe, so gilt, bis auf ein kleines Correctionsglied, die interessante Beziehung

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{3}}.$$

Zum Schluss dieses Paragraphen möchte ich folgende Bemerkung hinzufügen.

Obgleich die Theorie dieses neuen Instrumentes für die Registrierung von Neigungen verhältnissmässig einfach ausfällt, so weist doch ihre praktische Anwendung gewisse Schwierigkeiten auf. Diese Schwierigkeiten beziehen sich auf die Art und Weise, wie die Drehung  $\theta$  des Instrumentes eigentlich registriert werden soll.

Es scheint am einfachsten für diesen Zweck einen kleinen Spiegel an der Seitenfläche des schrägen Cylinders zu befestigen und die gewöhnliche optische Methode der Registrierung anzuwenden. Dies ist aber ganz und gar ausgeschlossen, nicht etwa, weil in diesem Fall bei Schwingungen des Apparates parallel der  $y$ -Axe der leuchtende Punkt sich längs der Zeitaxe auf der Registriertrommel verschieben und eine Verzerrung der erhaltenen Curve nach sich ziehen würde, sondern weil es praktisch nicht möglich ist, den Schwerpunkt des Systems genau in die Axe  $AB$  des Cylinders zu verlegen, wie es die vorige Theorie verlangt. Ist aber der Schwerpunkt des

<sup>1)</sup> Es ist dabei vorausgesetzt, dass  $L$  und  $l$  ihre früheren Werthe behalten.

Systems von der Axe  $AB$  etwas entfernt, möge diese Entfernung auch noch so klein sein, so wird bei Schwingungen des Apparates eine secundäre Drehung des Cylinders um die Axe  $AB$  herum zu Stande kommen, welche äusserst störend auf die Registrierung der Ablenkungen  $\theta$  wirkt.

Diese störende Wirkung der Drehung des Cylinders um seine Axe lässt sich jedoch durch Anwendung einer bestimmten Vorrichtung beseitigen; in welcher Weise dies zu erreichen ist, werden wir im nächsten Paragraphen sehen.

## § 11.

### Versuche mit dem abgeänderten Davison'schen Apparat.

Ehe ich zur Beschreibung des von mir verwendeten Apparates und der mit demselben mit Hilfe der Untersuchungsplattform ausgeführten Versuche übergehe, werde ich zuerst einige Versuche mittheilen, welche mit einem

Fig. 43.

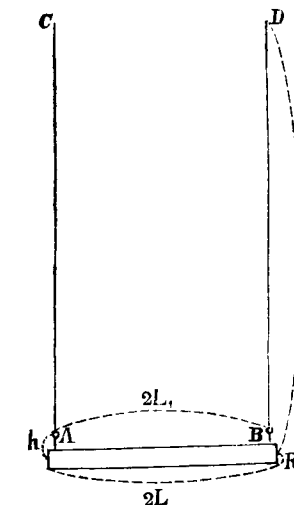
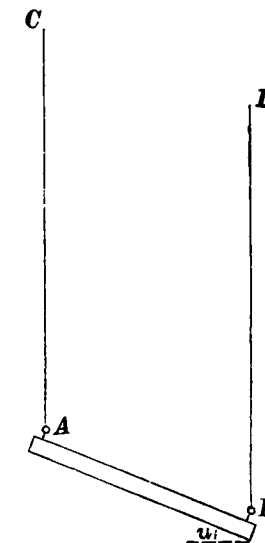


Fig. 44.



einfachen Modell des abgeänderten Davison'schen Apparates ausgeführt worden sind, und die den Zweck hatten, einige der früher aufgestellten Formeln einer experimentellen Prüfung zu unterziehen.

Dieses Modell ist auf den Figuren 43 und 44 dargestellt.

Es bestand aus einem einfachen Messingcylinder, welcher an zwei gleich langen Drähten aufgehängt wurde. Diesen Cylinder konnte man entweder horizontal oder schräg unter einem beliebigen Winkel  $u$  aufhängen.

Die Länge des Cylinders  $2L$  betrug 58,30 cm. und der Radius seiner Grundfläche  $R = 0,70$  cm.

Die Entfernung der unteren Befestigungspunkte  $A$  und  $B$   $2L_1$  war gleich 57,85 cm. und der dieser Punkte von der Axe des Cylinders  $h = 1,69$  cm.

Es wurden mit diesem Modell Schwingungsversuche ausgeführt und drei verschiedene Perioden der Schwingungen mit Hilfe eines Löbner'schen Secundenzählers gemessen:

die Periode  $T_1$  bei der Bewegung senkrecht zur Aufhängeebene  
 „ „  $T_2$  „ „ „ parallel<sup>1)</sup> „ „  
 „ „  $T$  der drehenden Bewegung um eine den Drähten  
 parallele Axe,

und zwar bei verschiedenen Neigungen  $u$  und bei verschiedenen Drahtlängen  $l$ .<sup>2)</sup>

Diese Perioden lassen sich nach den folgenden Formeln berechnen:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}},$$

$$T = \frac{2\pi}{n},$$

wo  $l_1$ ,  $l_2$  und  $n$  aus den Formeln (280), (283) und (295) zu entnehmen sind.

Es sind dabei, da die Entfernung der unteren Befestigungspunkte  $A$  und  $B$  der Drähte etwas kleiner als  $2L$  ist und  $A$  und  $B$  nicht auf der Axe des Cylinders liegen, noch weitere kleine Correctionen anzubringen, auf die wir hier nicht näher einzugehen brauchen.<sup>3)</sup>

Alle diese Correctionen sind allerdings sehr gering und  $l_1$  und  $l_2$  unterscheiden sich recht wenig von  $l$ . Bei Vernachlässigung eines kleinen Correctionsgliedes ergibt sich ausserdem nach der Formel (295)

$$n^2 = 3 \frac{g}{l}.$$

Bezeichnen wir, bei Vernachlässigung dieser kleinen Correctionsglieder, die entsprechenden Perioden durch  $(T_1)$ ,  $(T_2)$  und  $(T)$ , dann wird

$$(T_1) = (T_2) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

<sup>1)</sup> Freilich in der Aufhängeebene.

<sup>2)</sup>  $l$  bedeutet die Entfernung der oberen Befestigungspunkte der Drähte von der Axe des Cylinders.

<sup>3)</sup> Die kleine Correction in Folge des Umstandes, dass der Cylinder nicht schräg geschnitten war, wurde ausser Acht gelassen.

und

$$(T) = \frac{(T_2)}{\sqrt{3}}.$$

Diese Formeln lehren uns, dass mit hinreichender Annäherung die Perioden  $T_1$  und  $T_2$  einander gleich und vollständig unabhängig von der Neigung  $u$  sind.

Ausserdem, obgleich die Entfernung der Drähte bei Neigung des Cylinders kleiner wird und zudem das Trägheitsmoment sich verändert, erweist sich  $T$  ebenfalls als unabhängig von der Neigung  $u$ , wobei die Perioden  $T$  und  $T_1 = T_2$  immer in dem constanten Verhältniss von 1 zu  $\sqrt{3}$  stehen.

Es sind nun diese drei Perioden unter verschiedenen Bedingungen ermittelt worden und alsdann mit denjenigen Werthen, welche aus der früher erwähnten Formel mit Berücksichtigung der verschiedenen Correctionsgrössen sich ergeben, verglichen.

Die entsprechenden Zahlen sind in den folgenden drei Tabellen III, IV und V zusammengestellt.

Tabelle III.

$l = 100,7$  cm.  $(T_1) = (T_2) = 2,01$ .  $(T) = 1,16$ .

$u$	$T_1$		$T_2$		$T$	
	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.
0	2,02	2,01	1,99	2,01	1,16	1,16
28° 24'	2,03	2,01	1,99	2,01	1,17	1,16
57 46	2,05	2,03	2,01	2,03	1,21	1,16

Tabelle IV.

$l = 49,89$  cm.  $(T_1) = (T_2) = 1,42$ .  $(T) = 0,82$ .

$u$	$T_1$		$T_2$		$T$	
	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.
0	1,42	1,42	1,39	1,42	0,81	0,81
29° 58'	1,43	1,42	1,39	1,42	0,82	0,81
59 42	1,45	1,44	1,41	1,44	0,87	0,81

Tabelle V.

$l = 24,54 \text{ cm.}$        $(T_1) = (T_2) = 0,99.$        $(T) = 0,57.$

u	T <sub>1</sub>		T <sub>2</sub>		T	
	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.
0	1,00	0,99	0,96	0,99	0,56	0,56
29° 47'	1,01	1,00	0,95	1,00	0,56	0,56
59 15	1,03	1,03	0,96	1,03	0,57	0,56

Die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der Perioden ist im Allgemeinen als eine sehr befriedigende zu bezeichnen, insbesondere, wenn man dabei erwägt, dass solche provisorische Beobachtungen keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit erheben können, und dass die Unterschiede in den einzelnen beobachteten Werthen der Perioden 0,04 erreichen.

Diese Controllversuche haben also im Grossen und Ganzen die Richtigkeit der aufgestellten Formeln bestätigt.

Nach diesen einführenden Bemerkungen wollen wir zur Beschreibung des auf Grund der Entwicklungen des § 10 gebauten Apparates übergehen.

Es ist eine ganze Anzahl von Typen eines solchen Apparates untersucht worden. Aber am passendsten erwies sich dabei das einfachste Modell desselben, nämlich ein schräg geschnittener Messingcylinder, wie dies auf der Figur 40 zu ersehen ist.

Dabei betrug

- die Länge des Cylinders .....  $2L = 60,0 \text{ cm.}$ ,  
der Radius der Grundfläche .....  $R = 1,25 \text{ »}$   
die Länge der Drähte (bis zur Axe des Cylinders) .....  $l = 73,5 \text{ »}$   
die Entfernung der Drähte .....  $2\delta = 42,6 \text{ »}$   
die Neigung der Axe .....  $u = 44^\circ 47'$  und  
die Erhöhung der Mitte des Gewichtes über der Drehungs-  
axe der Plattform .....  $55,0 \text{ cm.}$

Zur Registrierung der Drehung des Systems um eine verticale Axe, welche Bewegung bei Untersuchungen über Neigungen nur vom Belang ist, wurde folgendes Verfahren angewendet, welches sich sehr gut bewährt hat.

An den Enden des Cylinders, auf entgegengesetzten Seiten, wurde je eine gleiche, flache Spule mit einer sehr grossen Anzahl von Windungen an-

gebracht und zwar so, dass die Windungsfläche der Spulen parallel der Cylinderaxe war und senkrecht zur Drahtebene stand, wie dies auf der Figur 45 angedeutet ist.

Jede Spule ragte theilweise in das möglichst homogene Feld je eines besonderen Electromagnets hinein. Die Stromkreise dieser Spulen wurden mit einem und demselben aperiodischen Galvanometer verbunden und zwar so, dass bei parallelen Verschiebungen des Cylinders senkrecht zur Ebene der Drähte die in den beiden Spulen inducierten Ströme in entgegengesetzten Richtungen durch die Windungen des Galvanometers flossen. Mit Hilfe von Rheostaten konnte man diese Ströme genau ausgleichen und dadurch erzielen, dass bei Schwingungen (Verschiebungen) des Cylinders die Galvanometerspule immer in Ruhe verblieb. Bei Drehungen des Systems um eine verticale Axe werden diese inducierten Ströme dagegen sich gegenseitig verstärken und einen entsprechenden Ausschlag des Galvanometers hervorrufen.

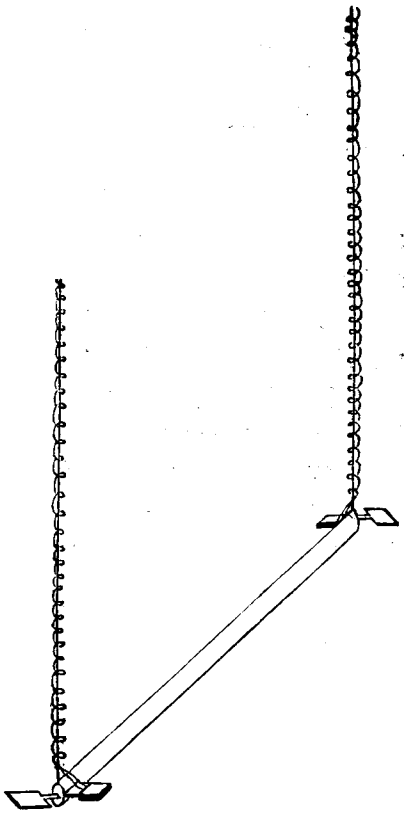
Auf diese Weise war die Möglichkeit geboten, die Schwingungen (Verschiebungen) des Apparates ganz unschädlich zu machen und nur die Drehungen desselben zu registrieren.

Ausser diesen zwei Spulen wurden an den Enden des schrägen Cylinders auf den gegenüberliegenden Seiten zwei dämpfende Kupferplatten angebracht, um die drehende Eigenbewegung des Apparates in eine aperiodische zu verwandeln und dadurch dieselbe bei der Registrierung der Neigungen der Unterlage möglichst zu eliminieren, wie dies schon früher von mir hinlänglich genug auseinandergesetzt war. Jede Kupferplatte hat ihren besonderen Electromagnet, so dass bei diesem Apparat im Ganzen vier Electromagnete verwendet wurden.

Die folgende Fig. 46 giebt eine photographische Abbildung des Instruments und zwar ohne die Electromagnete.

Dieser Apparat war auf der Untersuchungsplattform aufgestellt und einige Beobachtungen wurden mit ihm ausgeführt.

Fig. 45.



Die Art und Weise, wie die Bewegung der Galvanometerspule und die der Plattform registriert wurden, war vollständig ähnlich derjenigen, welche bei den weiter unten im § 13 zu besprechenden Versuchen mit dem Doppelpendel in Anwendung kam. Die entsprechende Versuchsanordnung ist dort ausführlich beschrieben; ich kann also hier mich damit begnügen, auf jene Stelle zu verweisen.

Nach erfolgter Ausgleichung der Spulen wurde die Plattform in Verschiebungen versetzt und zwar senkrecht zur Ebene der Drähte.

Die erhaltenen zwei Curven sind auf der Figur 47 dargestellt.<sup>1)</sup>

Die beiden sinusartigen Curven entsprechen der Plattformbewegung.

Bei derselben waren die Periodender Verschiebungen resp. gleich 8,6 Sec. und 5,3 Sec.

In beiden Fällen fiel die Galvanometercurve genau mit der Nulllinie zusammen, folglich kamen diese Verschiebungen überhaupt nicht zur Registrierung.

Die folgenden zwei Curven auf der Fig. 48 entsprechen dem Falle, wo die Plattform nur Neigungen ausgesetzt war.<sup>2)</sup>

Die beiden schwächeren Sinuscurven entsprechen der Bewegung der Plattform, die stärkeren des Galvanometers.

Wir sehen, dass in diesem Fall die Neigungen der Plattform wirklich registriert werden, wobei der Charakter der Galvanometercurve genau dem der Plattformcurve entspricht.

Bedeute nun  $T_1$  die Periode der Neigungen der Plattform und  $T$  die der Galvanometerbewegung, so findet man für eine dieser Curven<sup>3)</sup>

$$T_1 = 4,13$$

$$T = 4,14$$

und für die andere

$$T_1 = 2,77$$

$$T = 2,77.$$

Die Uebereinstimmung ist also eine fast vollkommene.

<sup>1)</sup> Die Länge einer Secunde auf der Registriertrommel betrug bei diesen Beobachtungen im Mittel 4,3 m/m.

<sup>2)</sup> Wegen eines Versehens in der Aufstellung liegt die Nulllinie etwas unsymmetrisch in Bezug auf die Plattformcurve.

<sup>3)</sup> Die Secunden sind durch Unterbrechungen in der Nulllinie markiert.

Fig. 46

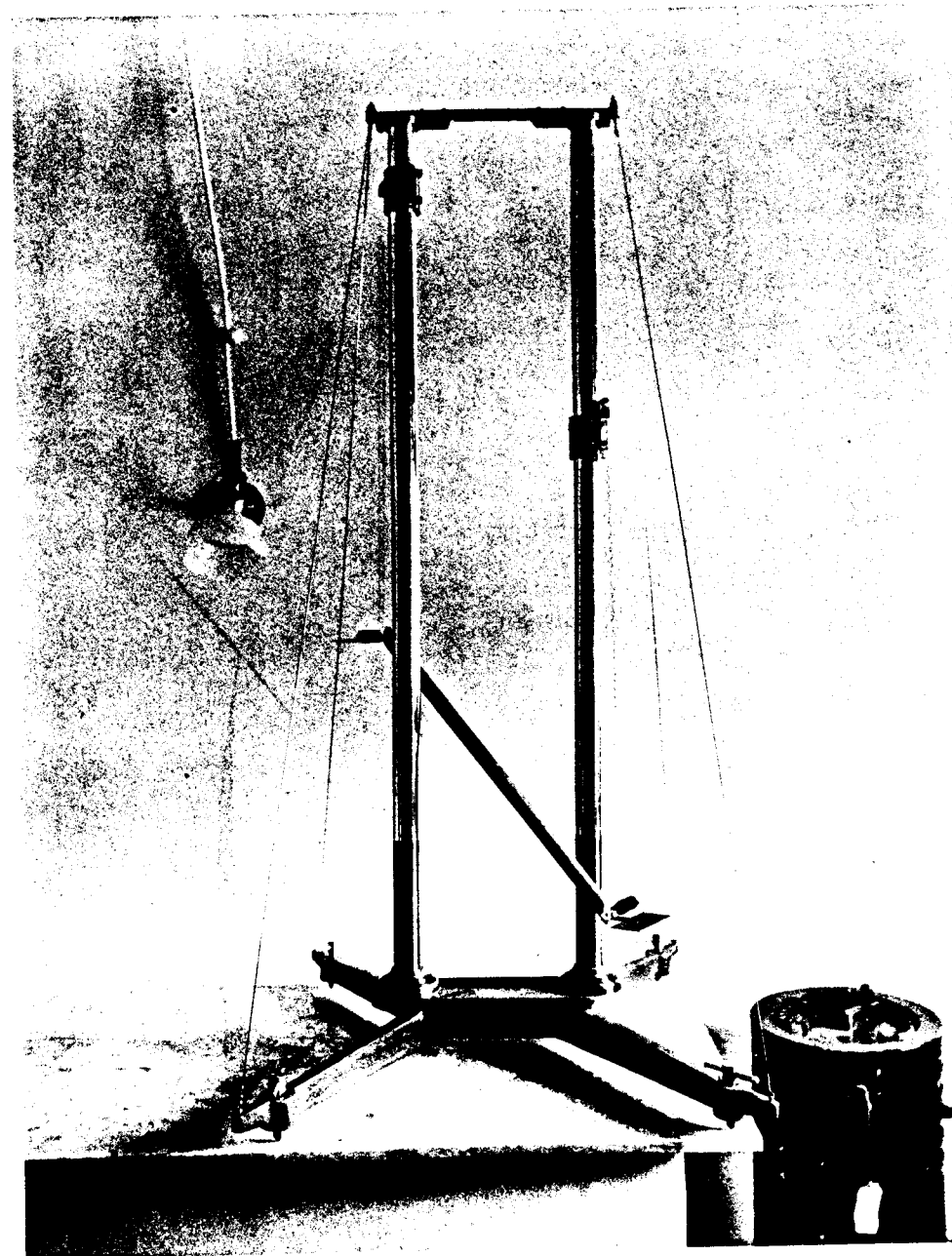




Fig. 47.

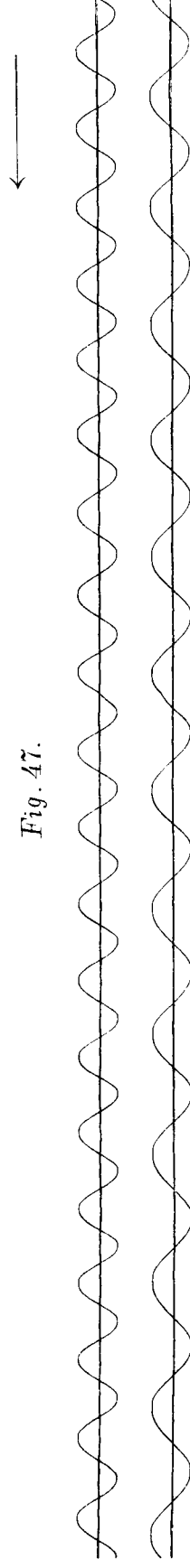


Fig. 48.

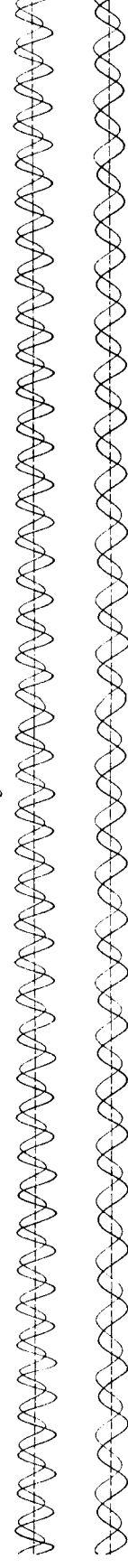


Fig. 49.

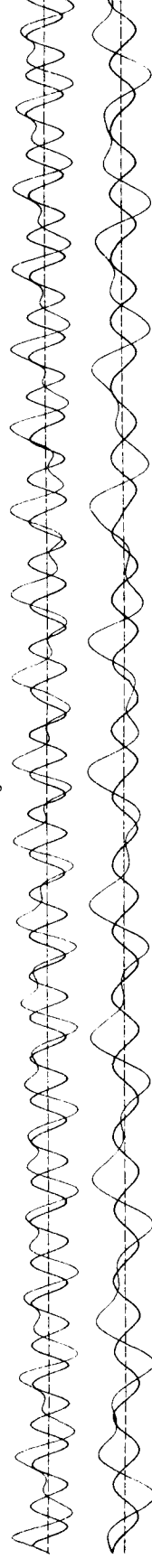


Fig. 53.

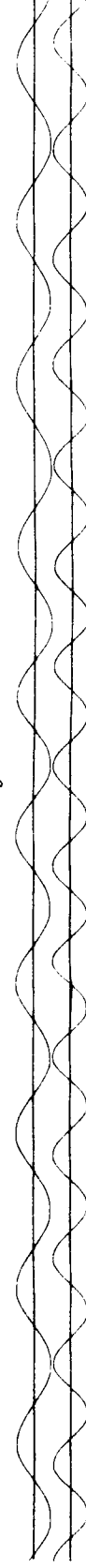
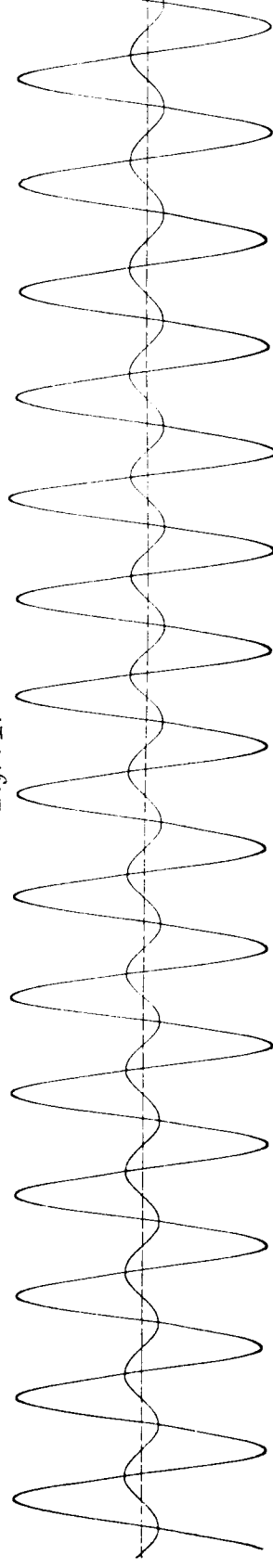


Fig. 54.



Am interessantesten sind die beiden Curven der Fig. 49.

In diesem Fall war die Plattform Verschiebungen und Neigungen zugleich ausgesetzt, wie dies aus der Form der entsprechenden zwei Plattformcurven sich erkennen lässt (doppelte Sinuscurven).

Die entsprechenden zwei Galvanometercurven (die stärkeren Curven) sind jedoch einfache Sinuscurven, welche durch die Neigungen der Plattform erzeugt sind.

Die Perioden dieser Neigungen und die der Galvanometerbewegung lassen sich aus der Figur ermitteln.

Es ergibt sich für die eine Curve

$$T_1 = 4;81$$

$$T = 4;85$$

und für die andere

$$T_1 = 2;96$$

$$T = 2;99.$$

Die Uebereinstimmung ist wiederum als eine sehr befriedigende zu bezeichnen.

Etwaige Unregelmässigkeiten der Curven lassen sich wohl durch secundäre Einflüsse, wie z. B. ungenügende Stabilität in der Aufstellung der Electromagnete, etwaige Unregelmässigkeiten in der Plattformbewegung und der Bewegung der Registriertrommel erklären.

Diese beiden letzten Curven auf der Fig. 49 zeigen also, dass bei zusammengesetzter Bewegung der Plattform nur die Neigungen derselben registriert werden, was in vollständigem Einklang mit der früher vorgeführten Theorie steht.

Die hier beschriebenen Versuche haben also in der That gezeigt, dass der abgeänderte Davison'sche Apparat wirklich im Stande ist, die Neigungen der Unterlage allein zu registrieren. Die Verschiebungen derselben üben auf diesen Apparat keinen Einfluss aus, folglich kann derselbe für seismometrische Beobachtungen zur Erforschung von Neigungen ganz gut verwendet werden.

Allein ist die Handhabung dieses Instrumentes ziemlich umständlich und compliciert, da dasselbe auf secundäre Einflüsse recht empfindlich ist.

Obgleich der Davison'sche Apparat in seiner hier beschriebenen abgeänderten Form, wie dies jetzt theoretisch und experimentell bewiesen ist, wirklich im Stande ist, die Neigungen allein zu registrieren, würde ich doch

diesen Apparat für seismometrische Zwecke kaum empfehlen können, da diese Aufgabe der Registrierung der Neigungen sich auf eine viel einfachere und übersichtlichere Weise verwirklichen lässt und zwar mit Hilfe von Apparaten, welche in der praktischen Seismometrie schon ihre volle Bürgerschaft errungen haben, nämlich mit Hilfe von Horizontal- oder Verticalpendeln.

Das Princip dieser neuen Beobachtungsmethode findet im nächsten Paragraphen seine Erläuterung.

## § 12.

### Theorie des Doppelpendels.

Wir haben eben gesehen, dass der abgeänderte Davison'sche Apparat die Möglichkeit giebt, die Neigungen allein zu registrieren. Dies lässt sich jedoch auf eine viel einfachere Weise erzielen mit Hilfe eines besonderen Apparates, welchen ich Doppelpendel nennen werde.

Dasselbe besteht im Wesentlichen aus folgendem.

Denken wir uns ein bifilar aufgehängtes gewöhnliches Verticalpendel, dessen Schwingungsebene mit der  $zx$ -Ebene zusammenfällt, und dessen Schwerpunkt bei ruhendem Pendel sich auf der  $z$ -Axe befindet.

Bedeutet nun  $\xi_1$  die relative Ablenkung des Pendels in Bezug auf sein Gestell,  $s_1$  die Erhebung des Schwingungsmittelpunktes des Gewichtes über der  $xy$ -Ebene (siehe die Fig. 39) und  $l_1$  die Pendellänge, so ergibt sich nach der Formel (233) folgende Differentialgleichung für die Bewegung desselben, wenn die Unterlage Verschiebungen  $x$  parallel der  $x$ -Axe und Neigungen  $\psi$  um die  $y$ -Axe ausgesetzt ist,

$$\xi_1'' + \frac{g}{l_1} \xi_1 + (x'' - g\psi) + s_1 \psi'' = 0.$$

Wollen wir noch das Pendel mit einer electromagnetischen Dämpfung und einer besonderen kleinen Spule zur electromagnetischen Registrierung der Bewegung desselben mit Hilfe eines aperiodischen Galvanometers versehen, wie dies ausführlich in § 17 meines früheren Aufsatzes<sup>1)</sup> «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen» beschrieben ist.

<sup>1)</sup> L. c.

Bedeute nun  $\varepsilon_1$  die entsprechende Dämpfungsconstante und setzen wir

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{l_1}$$

und

$$n_1^2 = \frac{g}{l_1},$$

so gilt folgende definitive Differentialgleichung für die Bewegung des Pendels

$$\theta_1'' + 2\varepsilon_1 \theta_1' + n_1^2 \theta_1 + \frac{1}{l_1} \{x'' - g\psi\} + \frac{s_1}{l_1} \psi'' = 0. \dots (296)$$

Bei Anwendung der electromagnetischen Registrierung mit Hilfe eines aperiodischen Galvanometers wird, wie ich im § 6 meines eben erwähnten Aufsatzes bewiesen habe, der Ablenkungswinkel  $\varphi_1$  des Galvanometers folgender Differentialgleichung genügen:

$$\varphi_1'' + 2\varepsilon_0 \varphi_1' + n_0^2 \varphi_1 + k_1 \theta_1' = 0, \dots (297)$$

wo  $\varepsilon_0$  und  $n_0^2$  die entsprechenden Constanten des Galvanometers bedeuten, wobei  $\varepsilon_0 \geq n_0$  sein soll.

$k_1$  ist eine Constante, welche von den constructiven Eigenschaften beider Instrumente und der Stromstärke im entsprechenden Electromagnet unmittelbar abhängt.

Die Bedeutung dieser Grösse wird durch die Formel (61) meiner Abhandlung «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen» festgestellt.

Denken wir uns weiter ein zweites ganz ähnliches Verticalpendel in derselben Weise wie das erste aufgestellt, aber in einer anderen Erhebung über der  $xy$ -Ebene, etwa  $s_2$  statt  $s_1$ .

Durch einfache Vertauschung der Indices in den Gleichungen (296) und (297) bekommt man für dieses zweite Pendel folgende zwei Gleichungen:

$$\theta_2'' + 2\varepsilon_2 \theta_2' + n_2^2 \theta_2 + \frac{1}{l_2} \{x'' - g\psi\} + \frac{s_2}{l_2} \psi'' = 0 \dots (298)$$

und

$$\varphi_2'' + 2\varepsilon_0 \varphi_2' + n_0^2 \varphi_2 + k_2 \theta_2' = 0. \dots (299)$$

Verbinden wir jetzt die Registrierspulen beider Pendel mit dem Galvanometer in der Weise, dass bei gleicher Verschiebung der Pendel die Inductionströme in entgegengesetzten Richtungen durch die Windungen

des Galvanometers laufen. Ausserdem machen wir beide Pendel ganz isochron und gleichen wir die Dämpfungsconstanten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  und die Werthe der Constanten  $k_1$  und  $k_2$  ab, was praktisch, wie wir weiter sehen werden, nicht schwer zu bewerkstelligen ist.

Setzen wir dementsprechend

$$l_1 = l_2 = l,$$

also

$$n_1^2 = n_2^2 = n^2$$

und

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon,$$

$$k_1 = k_2 = k,$$

ferner

$$\theta_1 - \theta_2 = \theta$$

und

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi,$$

wo  $\varphi$  den resultierenden Ausschlag des Galvanometers bedeutet, so ergeben sich, wenn man die Gleichung (298) von (296) und die Gleichung (299) von (297) subtrahiert, folgende zwei definitive Beziehungen:

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + n^2\theta + \frac{s_1 - s_2}{l}\psi'' = 0 \dots\dots\dots(300)$$

und

$$\varphi'' + 2\epsilon_0\varphi' + n_0^2\varphi + k\theta' = 0. \dots\dots\dots(301)$$

Diese Gleichungen zeigen ganz deutlich, dass  $\theta$ , folglich auch die gemessene Grösse  $\varphi$  ganz unabhängig von irgend welchen Verschiebungen ist und nur von der Neigung  $\psi$  abhängt.

Dieser Apparat liefert also die Möglichkeit, die Neigungen allein zu registrieren und zwar in sehr einfacher und übersichtlicher Weise.

Derselbe bietet noch andere Vortheile dar.

Erstens können beide Pendel ganz unabhängig von einander aufgestellt werden und zwar auf sehr verschiedenen Höhen, was sehr empfehlenswerth ist, da mit wachsender Differenz  $s_1 - s_2$  die Empfindlichkeit des Apparats zunimmt. Man könnte etwa eine und dieselbe Wand des Gebäudes der seismometrischen Station benutzen und ein Pendel oben und das andere unten aufstellen.

Zweitens können die Pendel in einem getrennten Local von dem registrierenden Theil (Galvanometer und Trommel), etwa in einem anderen Gebäude aufgestellt werden, was in manchen Fällen sehr bequem werden kann.

Drittens kann die Empfindlichkeit des Apparates durch Vermehrung der Stromstärke in den Electromagneten, in deren Feldern die Registrierspulen sich bewegen, in beliebigem Maasse vergrössert werden.

Zu demselben Zweck und mit demselben Erfolge könnte man, statt zweier Verticalpendel, zwei Horizontalpendel benutzen. Auch in diesem Falle behalten die Gleichungen (300) und (301) ihre Gültigkeit mit dem einzigen Unterschiede, dass statt  $n^2$  in der Gleichung (300)  $n^2 i_0$  einzusetzen wäre, wo  $i_0$  die Neigung der Drehungsaxe des Horizontalpendels in Bezug auf die Verticalaxe bedeutet. Durch Anwendung von Horizontalpendeln wird bekanntlich die Empfindlichkeit der Registrierung in hohem Maasse vergrössert.

Die gestellte Aufgabe, nämlich einen solchen Apparat zu construiren, welcher ermöglicht, die Neigungen allein zu registrieren, findet also durch das oben beschriebene Doppelpendel ihre Lösung.

$\varphi$  ist die gemessene Grösse. Ihre Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ist also graphisch bekannt. Wollen wir nun sehen, wie aus ihr  $\psi$  als Function der Zeit  $t$  zu ermitteln ist.

Am Anfang einer Erderschütterung, also für  $t = 0$ , kann  $\psi = 0$  gesetzt werden. In diesem Moment sei die erste Derivierte von  $\psi$  gleich  $\psi_0'$ .  $\psi_0'$  ist unbekannt.

Für  $t = 0$  wird ebenfalls  $\theta_0 = 0$  und  $\varphi_0 = 0$ . Was nun  $\theta_0'$  anbelangt, so ergibt es sich aus der Gleichung (300) in ganz ähnlicher Weise, wie dies in § 2 geschah.

Es wird nämlich

$$\theta_0' = -\frac{s_1 - s_2}{l}\psi_0'. \dots\dots\dots(302)$$

$\varphi_0$  kann, wie dies im § 8 meiner früheren Abhandlung «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen» bewiesen wurde, einfach gleich Null gesetzt werden.

Man erhält also durch gliedweise Integration der Gleichung (301) zwischen den Grenzen 0 und  $t$  folgenden Ausdruck:

$$\theta = -\frac{1}{k} \left[ \varphi' + 2\epsilon_0\varphi + n_0^2 \int_0^t \varphi dt \right] = F(t). \dots\dots\dots(303)$$

$\theta$  als Function von  $t$  kann also als bekannt angesehen werden.

Durch eine ähnliche Behandlung der Gleichung (300) folgt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen und der Beziehung (302)

$$\psi = -\frac{l}{s_1 - s_2} \left[ \theta + 2\varepsilon \int_0^t \theta dt + n^2 \int_0^t dt \int_0^t \theta dt \right] = f(t). \dots (304)$$

Da  $\theta$  als Function von  $t$  als bekannt anzusehen ist, so lässt sich aus dieser Gleichung die Function  $f(t)$  ermitteln, also die Neigung  $\psi$  in ihrer Abhängigkeit von der Zeit bestimmen.

Wollen wir nun noch den Specialfall besprechen, wo  $\psi$  sich mit der Zeit ändert, etwa nach dem Gesetze

$$\psi = \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma).^1)$$

Der Allgemeinheit halber haben wir auch eine anfängliche Phase  $\gamma$  eingeführt.

Die Periode dieser Bewegung wird

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1}.$$

Wir können dann schreiben

$$\theta'' + 2\varepsilon \theta' + n^2 \theta - n_1^2 \frac{s_1 - s_2}{l} \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma) = 0. \dots (305)$$

Setzen wir abermals voraus, um den Einfluss der Eigenbewegung der Pendel möglichst zu vermeiden, dass dieselben aperiodisch sind. Dementsprechend wird

$$\varepsilon \geq n.$$

Dann ergibt sich durch Integration der Gleichung (305) bei Vernachlässigung von Gliedern, welche schon für sehr kleine Werthe von  $t$  verschwinden,

$$\theta = -\frac{n_1^2}{\sqrt{R}} \cdot \frac{s_1 - s_2}{l} \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma + \Delta), \dots (306)$$

wo  $R$  und  $\Delta$  durch die Formeln (290) gegeben sind.

Daraus folgern wir

$$\theta' = -\frac{n_1^3}{\sqrt{R}} \cdot \frac{s_1 - s_2}{l} \psi_0 \cos(n_1 t + \gamma + \Delta).$$

<sup>1)</sup> Man vergleiche die Gleichung (286).

Bringen wir diesen Werth von  $\theta'$  in die Gleichung (301) ein, so wird

$$\varphi'' + 2\varepsilon_0 \varphi' + n_0^2 \varphi - k \frac{n_1^3}{\sqrt{R}} \cdot \frac{s_1 - s_2}{l} \cdot \psi_0 \cos(n_1 t + \gamma + \Delta) = 0. \dots (307)$$

Setzen wir nun

$$v_1 = \varepsilon_0 + \alpha_0$$

$$v_2 = \varepsilon_0 - \alpha_0$$

$$\alpha_0 = +\sqrt{\varepsilon_0^2 - n_0^2},$$

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= (n_1^2 + v_1^2)(n_1^2 + v_2^2) \\ \operatorname{tg} \Delta_1 &= \frac{n_1^2 - n_0^2}{2\varepsilon_0 n_1} \end{aligned} \right\} \dots (308)$$

und integrieren die Gleichung (307), so resultiert, wiederum bei Vernachlässigung von Gliedern, welche schon für kleine Werthe von  $t$  verschwinden,

$$\varphi = k n_1 \frac{n_1^2}{\sqrt{R}} \cdot \frac{s_1 - s_2}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_1}} \cdot \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma + \Delta - \Delta_1),$$

oder, wenn

$$\mathfrak{A} = k n_1 \frac{n_1^2}{\sqrt{R}} \cdot \frac{s_1 - s_2}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_1}} \dots (309)$$

gesetzt wird,

$$\varphi = \mathfrak{A} \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma + \Delta - \Delta_1). \dots (310)$$

Wir sehen also, dass dem Galvanometer eine ähnliche periodische Bewegung, wie für  $\psi$  zukommt.

Die Periode der Bewegung ist genau dieselbe. Die Amplitude erhält nur den Zahlenfactor  $\mathfrak{A}$ ; ausserdem wird die anfängliche Phase etwas geändert.

Setzen wir wiederum den Grenzfall voraus, nämlich, dass

$$\varepsilon = n$$

und

$$\varepsilon_0 = n_0$$

ist, was praktisch sehr leicht zu bewerkstelligen ist und bei den weiter mitzutheilenden Versuchen wirklich stattfand, dann wird

$$\mathfrak{A} = k n_1 \frac{s_1 - s_2}{l} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{n_1^2 + n_0^2} \dots (311)$$

Der beschriebene Apparat wird um so empfindlicher, je grösser  $\mathfrak{A}$  wird. Es lohnt sich folglich  $k$  und  $\frac{s_1 - s_2}{l}$  gross zu wählen.

$n_1$  steht uns nicht zur Verfügung, wohl aber  $n$  und  $n_0$ .

Um  $\mathfrak{A}$  zu vergrössern, müssen  $n$  und  $n_0$  klein gewählt werden, d. h. die Eigenperioden (ohne Dämpfung) der Pendel und des Galvanometers müssen möglichst gross gewählt werden. In dieser Hinsicht sind für diesen Apparat Horizontalpendel den Vertikalpendeln vorzuziehen.

Das in diesem § beschriebene verticale Doppelpendel wurde nun vom Mechaniker des physikalischen Laboratoriums der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St.-Petersburg Herrn Masing construirt und auf der beweglichen Plattform untersucht, wobei dasselbe, entsprechend der hier vorgeführten Theorie, sich sehr gut bewährt hat, wie wir es im nächsten § sehen werden.

### § 13.

#### Versuche mit dem Doppelpendel auf der Untersuchungsplattform.

Die zu diesen Versuchen benutzten zwei Verticalpendel wurden an einem gemeinsamen hohen Gestell befestigt, das eine über dem anderen.<sup>1)</sup>

Statt jedes Pendel biflar an Drähten aufzuhängen, wurde das Gewicht jedes Pendels an einem besonderen Rahmen befestigt, welcher mit Hilfe zweier flacher, federartiger, metallischer Streifen an zwei Querstücken auf den Säulen des Gestells angebracht wurde.

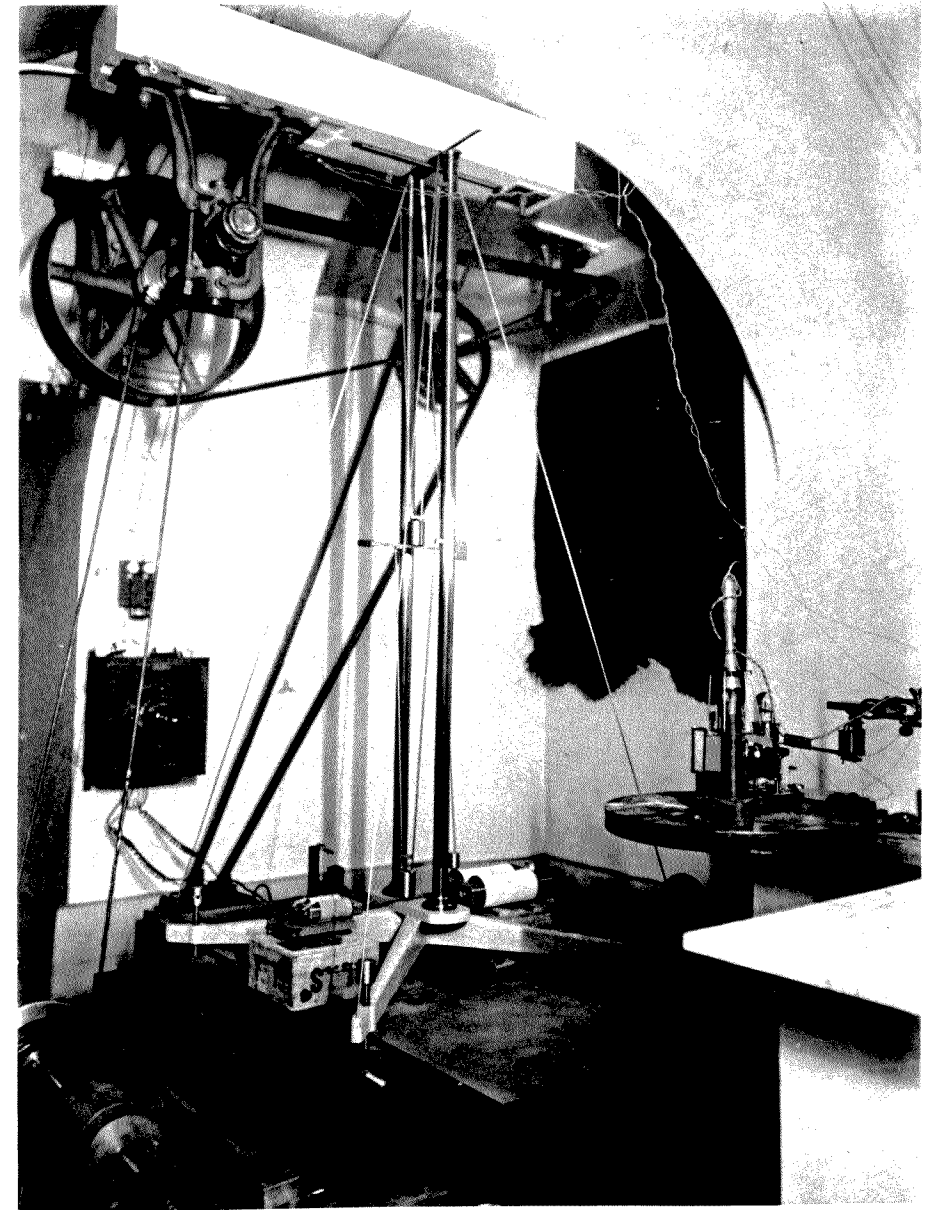
Durch diese Vorrichtung werden die Seitenbewegungen der Pendel möglichst vermieden.

An dem Gewichte jedes Pendels wurde von unten ein Stab in der Richtung der Pendelbewegung angebracht. Derselbe trug an einem Ende eine dämpfende Kupferplatte und auf dem anderen eine kleine flache Spule mit einer sehr grossen Anzahl von Windungen. Platte und Spule ragten theilweise in das möglichst homogene Feld je eines besonderen Electromagnetes hinein, so dass bei diesen Versuchen im Ganzen 4 Electromagnete verwendet wurden.

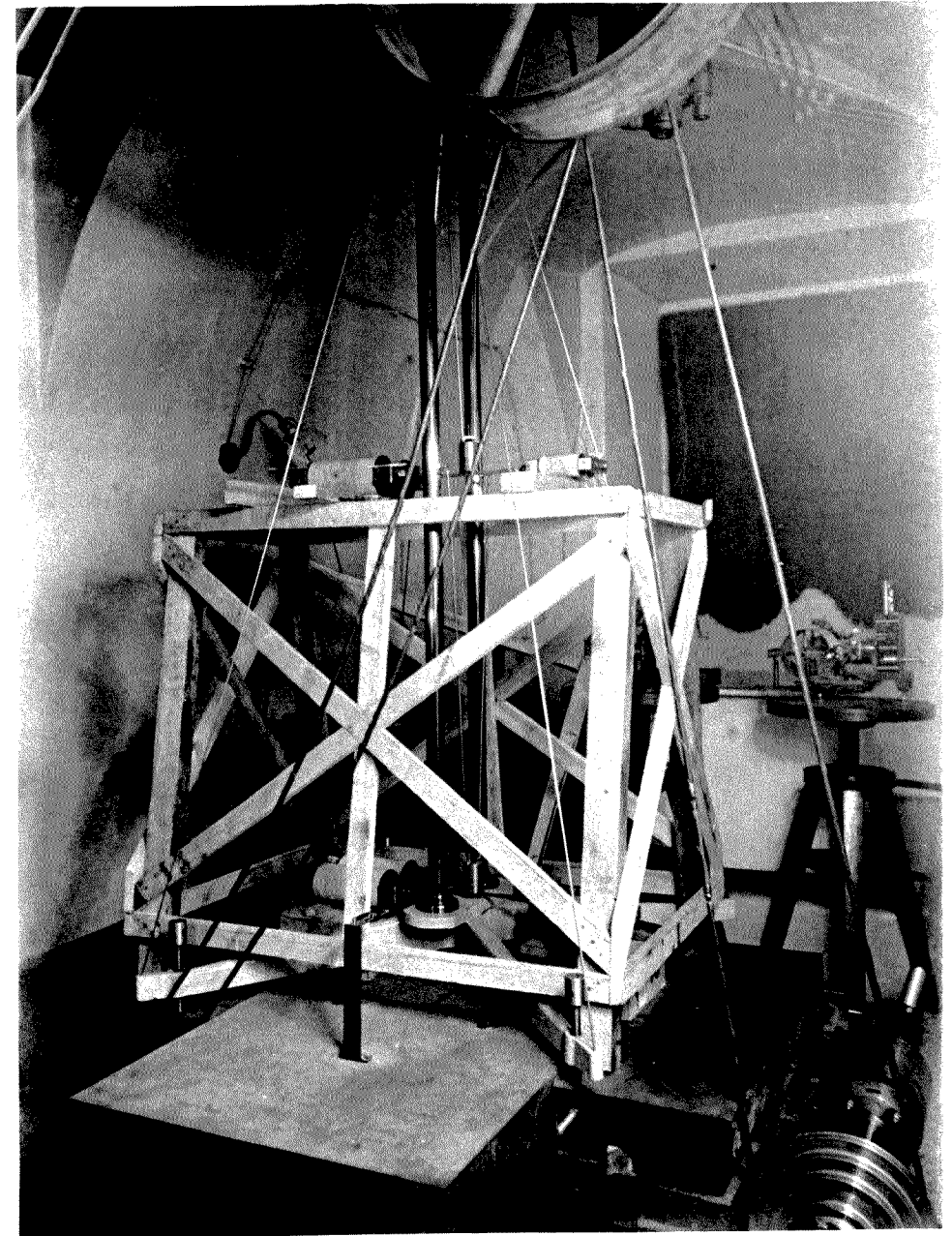
Die Figur (50) giebt eine allgemeine Ansicht des Doppelpendels, ohne die oberen Electromagnete.

<sup>1)</sup> In Wirklichkeit für eigentliche Beobachtungszwecke können sie ganz getrennt von einander aufgestellt werden, was viel vortheilhafter ist.

Fig. 50



*Fig. 51*



Auf der folgenden Fig. (51) ist eine Aufnahme des Instruments auf der Untersuchungsplattform wiedergegeben.

Das auf derselben sichtbare Holzwerk diente zur Stützung der oberen Electromagnete.

Jedes Pendelgewicht wurde von oben mit einem Stift mit Gewinde versehen, auf welchem eine Scheibe auf- und niedergeschraubt werden konnte, um die Perioden genau ausgleichen zu können.

Bei diesen Versuchen wurde die totale Periode beider Pendel

$$T = 2,01.$$

Das aperiodische Galvanometer und die Registriertrommel befanden sich auf besonderen festen Tischen.

Die entsprechenden Registriereinrichtungen wurden ganz analog denjenigen, welche ich früher verwendet und ausführlich in meinem Aufsatz «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen» beschrieben habe. Ich brauche also auf dieselben hier nicht näher einzugehen.

In den Stromkreisen der Electromagnete und am Galvanometer wurden Rheostate eingeschaltet, welche ermöglichten, die Dämpfungsconstanten und die Werthe von  $k_1$  und  $k_2$  auszugleichen. Ausserdem wurden die Widerstände so reguliert, dass

$$\varepsilon = n$$

und

$$\varepsilon_0 = n_0$$

war.

Dies ist praktisch sehr leicht zu erreichen.

Die Stromstärke in den dämpfenden Electromagneten betrug etwa 5 Amp. und die in den beiden anderen zur Registrierung benutzten etwa 2 Amp.

Ausser der Bewegung der Galvanometerspule wurde noch auf der Registriertrommel mit Hilfe eines festen Spiegels die Nulllinie aufgeschrieben. Vor diesem Spiegel wurde jede Secunde ein kleiner Schirm mit Hilfe eines besonderen kleinen Electromagnets angezogen, wodurch die Nulllinie kleine Unterbrechungen erfahren hat, welche die Secunden direct angaben.

Die Bewegung der Plattform selbst wurde in folgender Weise auf derselben Trommel aufgeschrieben.

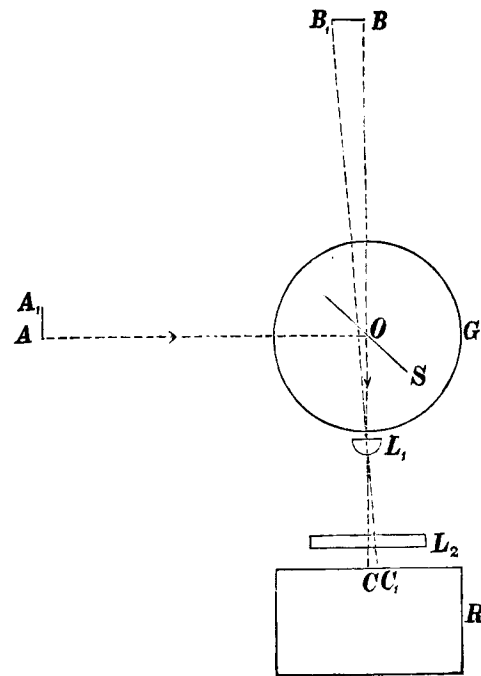
An der Plattform wurde über der Drehungsaxe derselben eine verticale Stange angebracht und an ihrem oberen Ende eine kleine Glühlampe mit geradem, verticalen Kohlenfaden befestigt. Bei Verschiebungen und Neigungen der Plattform bewegt sich die Lampe hin und her.



Diese Lampe wurde von einem cylindrischen Schirm umgeben, welcher einen Schlitz hatte. Vor diesem Schlitz wurde ein kleines Rohr aus Pappe mit rechteckigem, verlängertem Querschnitt senkrecht zur Richtung der Plattformbewegung angebracht, welches die von der Lampe ausgehenden Strahlen begrenzte.

Diese Strahlen  $AO$  (siehe die Fig. 52) fielen auf einen um  $45^\circ$  geneigten und auf dem Galvanometer  $G$  aufgestellten Spiegel  $S$ , wurden auch  $OC$  reflectiert und mit Hilfe zweier cylindrischer Linsen  $L_1$  und  $L_2$ ,<sup>1)</sup>

Fig. 52.



von welchen die eine vertical und die andere horizontal stand, zu einem Lichtpunkte  $C$  auf der Registriertrommel  $R$  concentrirt. Bei normaler Lage der Plattform muss dieser Punkt auf der Nulllinie sich befinden.

Wenn bei Verschiebung oder Neigung der Plattform der Lichtpunkt  $A$  sich etwa nach  $A_1$  bewegt, so verschiebt sich sein Bild von  $B$  nach  $B_1$  und der entsprechende Lichtpunkt  $C$  auf der Trommel wird nach  $C_1$  rücken. Auf diese Weise lässt sich sehr leicht auf derselben Trommel nicht nur die Bewegung der Galvanometerspule (dazu muss man eine besondere Lampe benutzen), sondern auch die Bewegung der Plattform selbst registrieren.

Bedeutet nun  $s_0$  die Erhebung der Mitte des Spiegels  $S$  über der Drehungsaxe der Plattform, so wird die Ablenkung  $\xi$  eines Punktes der Glühlampe, dessen Erhebung über der Drehungsaxe der Plattform die gleiche ist, von seiner Gleichgewichtslage sich folgendermaassen ausdrücken:

$$\xi = x + s_0 \psi,$$

worin  $x$  die Verschiebung und  $\psi$  die Neigung der Plattform bedeutet.

$x$  und  $\psi$  sind dabei beide periodische Functionen der Zeit.

Ist nur eine dieser Bewegungen vorhanden, so wird der entsprechende Lichtpunkt  $C$  eine einfache Sinuscurve auf der Trommel aufschreiben. Finden aber beide Bewegungen zugleich statt, so ergibt sich, da jede Bewegung

<sup>1)</sup> Diese Linsen dienten auch zugleich zur Registrierung der Galvanometerbewegung.

ganz unabhängig von den anderen ist, eine doppelte Sinuscurve mit zwei Perioden, welche den Perioden von  $x$  und  $\psi$  entsprechen.

Wir können nun setzen

$$x = x_0 \sin(n_2 t + \gamma')$$

$$\psi = \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma).$$

Die Periode der Verschiebung wird

$$T_2 = \frac{2\pi}{n_2}$$

und die der Neigung

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1}.$$

Bei meiner Plattform war nun

$$x_0 = 6,4 \text{ m/m}$$

$$\psi_0 = 0^\circ 17' 57''$$

$$s_0 = 84,4 \text{ cm.}$$

und

$$s_1 - s_2 = 104,4 \text{ cm.}$$

Aus der Periode der Pendel  $T = 2;01$  erhält man noch

$$n = \epsilon = 3,126,$$

$$l = 100,5 \text{ cm.}$$

und

$$\frac{s_1 - s_2}{l} = 1,039.$$

Für das Galvanometer haben wir

$$n_0 = \epsilon_0 = 0,423. ^1)$$

Nach diesen Bemerkungen wollen wir zu der Betrachtung der unter verschiedenen Bedingungen erhaltenen Curven übergehen.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Siehe «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen». L. c. § 15.

<sup>2)</sup> Bei diesen Versuchen war die Länge einer Secunde auf der Registriertrommel im Mittel gleich 6,1 m/m.

Die beiden Curven auf der Fig. (53)<sup>1)</sup> entsprechen dem Fall, wo die Plattform nur Verschiebungen ausgesetzt war. Bei der unteren Curve war die Periode dieser Verschiebung

$$T_2 = 5;10$$

und bei der oberen

$$T_2 = 7;69.$$

Was nun das Galvanometer anbelangt, so blieb dasselbe in Ruhe, wie dies aus der Figur zu ersehen ist, da die in diesem Fall vom Galvanometer gezeichnete Linie mit der Nulllinie zusammenfällt und kaum von ihr zu unterscheiden ist.

Wäre der Stromkreis einer der beiden Registrierspulen bei den Pendeln unterbrochen, so würde die andere Spule bei Bewegung der Pendel unter dem Einflusse der Verschiebungen der Plattform dem Galvanometer recht beträchtliche Ausschläge erteilen, wie dies auf der Fig. (54) zu ersehen ist, wo die innere Curve der Plattformbewegung und die äussere der Galvanometerbewegung entspricht. Die Perioden dieser beiden Curven sind genau dieselben und zwar gleich 5;15.

Die Amplituden der äusseren Curve sind sehr gross, folglich ist die Compensation beider Spulen als eine sehr vollkommene zu betrachten.

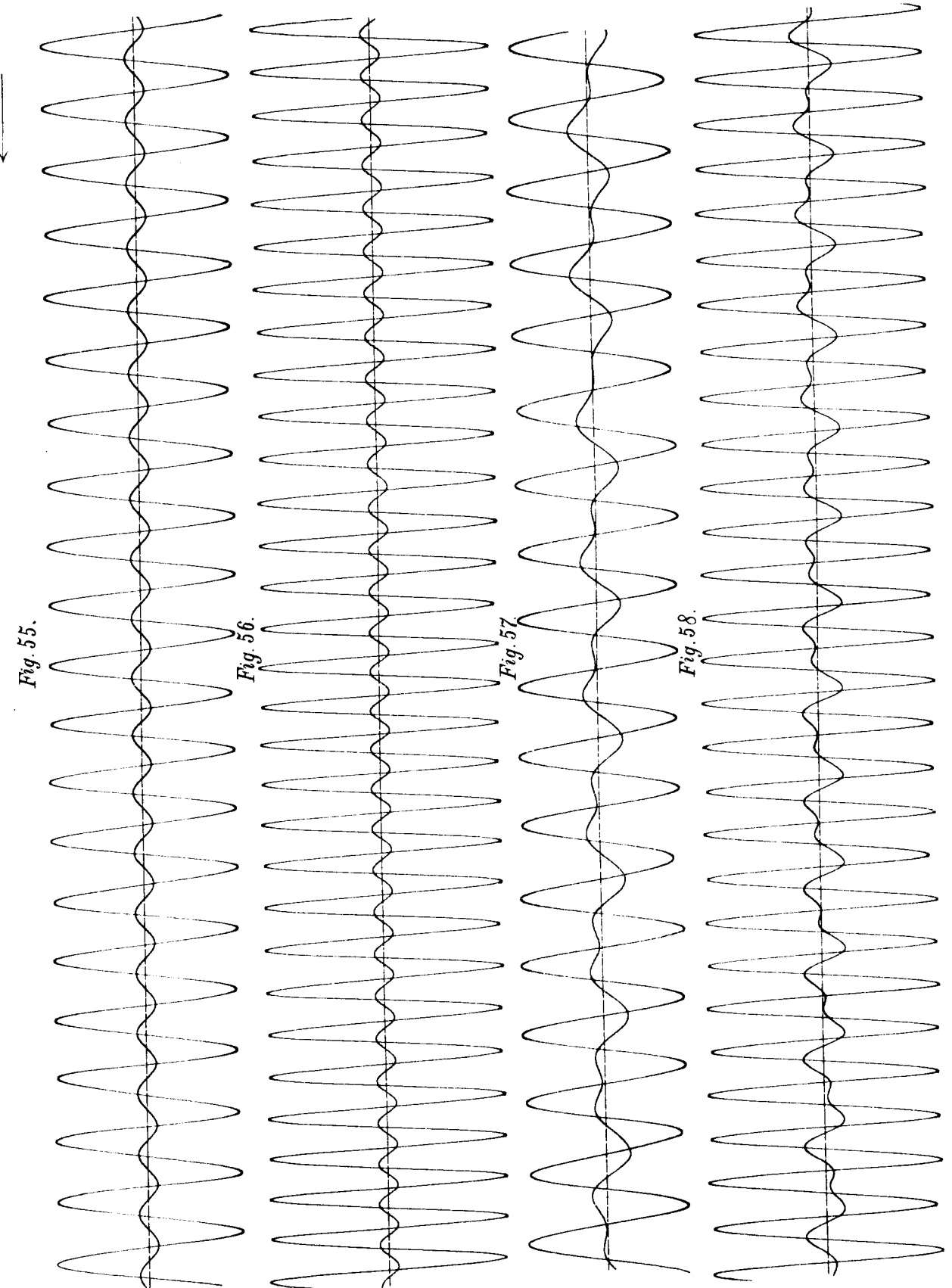
Dieser Versuch beweist am deutlichsten, dass es wirklich möglich ist, mit Hilfe zweier Pendel und zweier Spulen den Einfluss der Verschiebungen vollständig zu eliminieren.

Die beiden folgenden Figuren (55) und (56) entsprechen dem Fall, wo die Plattform nur Neigungen ausgesetzt war. Die beiden inneren Curven geben die Plattformbewegung und die äusseren die Bewegung des Galvanometers wieder.

Ein Blick auf diese Curven lässt sofort erkennen, dass der Charakter der Galvanometerbewegung genau dem der Plattformbewegung entspricht. Die Perioden der Galvanometer- und der Plattformbewegung sind genau dieselben, und zwar bei der Curve (Fig. 55)  $T_1 = 3;75$  und bei der Curve (Fig. 56)  $T_1 = 2;58$ . Wir sehen auch, dass die Amplituden der äusseren Curven bedeutend grösser, als die der inneren sind, folglich wird die Empfindlichkeit der Registrierung entsprechend grösser sein.

Am interessantesten sind aber die Curven, welche auf den Figuren 57 und 58 dargestellt sind.

In diesem Falle war die Plattform Verschiebungen und Neigungen zugleich ausgesetzt, wie dies aus der verzerrten Form der inneren Curven



<sup>1)</sup> Siehe Seite 118.

ersichtlich ist, die eine doppelte Sinuscurve mit den Perioden  $T_1$  (Neigung) und  $T_2$  (Verschiebung) darstellt.

Diese Perioden wurden direct mit Hilfe eines Löbner'schen Secundenzählers ermittelt.

Es ergab sich im Mittel aus 10 Bestimmungen für jede Periode:  
bei der Fig. 57

$$T_1 = 4;31$$

$$T_2 = 8;96;$$

bei der Fig. 58

$$T_1 = 2;70$$

$$T_2 = 5;24.$$

Nun aber sind, wie aus den Figuren zu ersehen ist, die Galvanometercurven in beiden Fällen einfache Sinuscurven, welche nur den Neigungen der Plattform entsprechen.

Die entsprechenden Perioden  $T_1'$  ergeben sich direct aus der Figur und zwar ist für die Figur 57

$$T_1' = 4;32$$

und für die Figur 58

$$T_1' = 2;70.$$

Diese Perioden stimmen bis auf 0;01 mit den direct ermittelten Perioden der Neigung der Plattform überein.

Wir sehen also, dass unser Doppelpendel, obgleich die Plattform eine complicierte Bewegung ausführt, nur auf die Neigungen reagiert und nur diese auf der Trommel aufschreibt.

Bis jetzt haben wir nur diejenigen Fälle besprochen, wo die Bewegung der Plattform eine regelmässige war.

Wollen wir nun aber sehen, was stattfindet, wenn diese Bewegung eine unregelmässige ist. Eine solche lässt sich der Plattform direct mit der Hand ertheilen.

Die folgende Fig. 59 entspricht dem Fall, wo die Plattform regelmässigen Verschiebungen mit der Periode  $T_2 = 5;57$  ausgesetzt war (siehe das Ende der Curve) und alsdann ihr unregelmässige Neigungen ertheilt wurden.

Am Anfang blieb das Galvanometer in Ruhe; fing man aber an die Plattform zu schaukeln (siehe die innere Curve), so bekam das Galvanometer

sofort entsprechende Ausschläge. Hörte jedoch dieses Schaukeln auf, so verblieb die Galvanometerspule in Ruhe (Ende der Curve), obgleich die Verschiebungen der Plattform immer noch vorhanden waren.

Die folgende Fig. 60 entspricht dem Fall, wo die Plattform nur unregelmässige Neigungen erfuhr. Die äussere Curve zeigt sehr deutlich, mit welcher Empfindlichkeit das Galvanometer auf dieselben reagirt.

Bei der nächsten Fig. 61 war die Plattform regelmässigen Neigungen ausgesetzt und alsdann wurden ihr unregelmässige Verschiebungen ertheilt (Verzerrung der inneren Curve). Wir sehen, dass die Galvanometercurve nur diese regelmässigen Neigungen mit fast genau derselben Periode wiedergiebt und ganz und gar unempfindlich für die unregelmässigen Verschiebungen verbleibt.

Zum Schluss sind auf der folgenden Fig. 62 zwei Curven angegeben, welche dem Fall entsprechen, wo die Plattform nur unregelmässigen Verschiebungen ausgesetzt wurde.

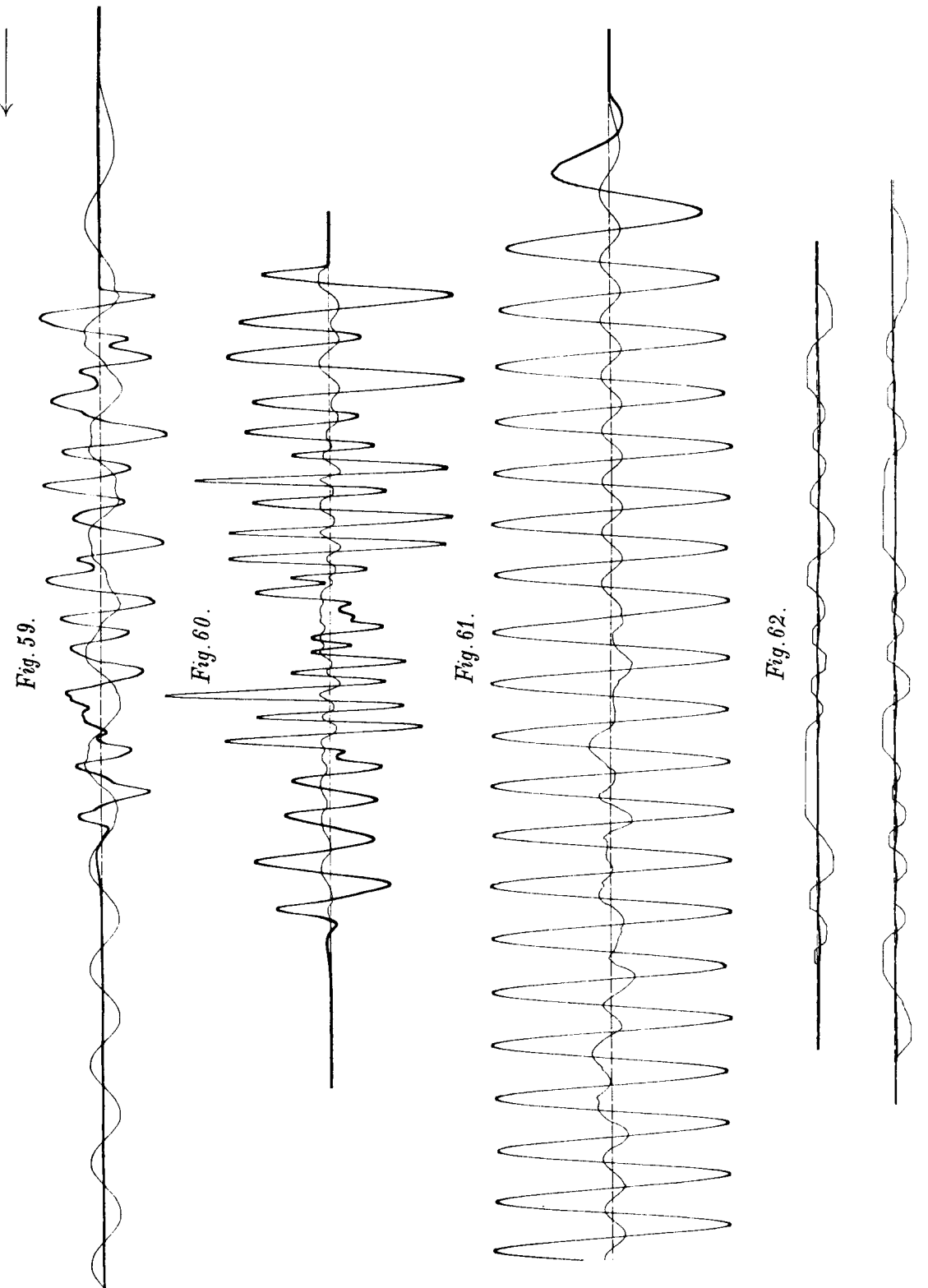
Wir sehen, dass in diesem Fall das Galvanometer ebenfalls gewissermaassen in Ruhe verblieb. Wenn sehr kleine Schwankungen desselben sich auf der Figur noch erkennen lassen, so sind sie ohne Zweifel auf die Eigenschwingungen des sehr hohen Gestells, auf welchem die Pendel befestigt waren, und auf die Erschütterung der oberen Elektromagnete zurückzuführen. Bei passender Aufstellung der Pendel auf einer und derselben Wand würden diese kleinen Störungen wahrscheinlich ganz fortfallen.

Diese Versuche bestätigen also in unzweifelhafter Weise die früher vorgeführte Theorie und beweisen, dass ein passend compensiertes Doppelpendel sich als ein zur Erforschung der Neigungen wirklich geeignetes Instrument erweist.

Der Vortheil der electromagnetischen Registrierung besteht nicht nur darin, dass man mit Hilfe derselben die Wirkung der Verschiebungen gänzlich eliminieren kann, sondern, dass man dabei die Empfindlichkeit der Registrierung in beliebigem Maasse vergrössern kann.

Diese Frage habe ich im § 19 meiner Abhandlung «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen» besprochen, es mögen aber hier noch einige weitere Versuche über diesen Gegenstand mitgetheilt werden.

Diese Versuche wurden nicht mit dem Doppelpendel, sondern mit einem gewöhnlichen Zöllner'schen periodischen Horizontalpendel ausgeführt. An dem Arm desselben wurde ein kleiner Spiegel angebracht und die Bewegung des Pendels direct auf der drehbaren Trommel registriert. Neben dieser Curve wurde die Galvanometerbewegung ebenfalls aufgeschrieben, so dass man durch einen unmittelbaren Vergleich beider Ausschläge einen directen



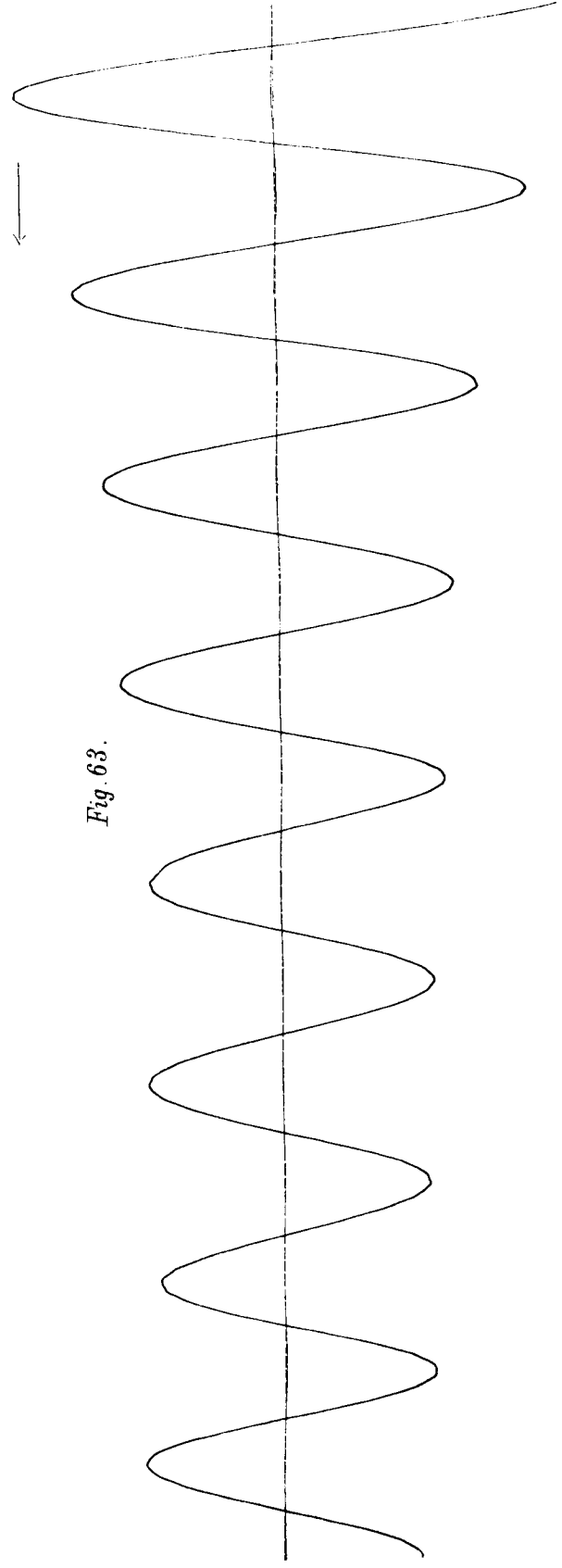


Fig. 63.

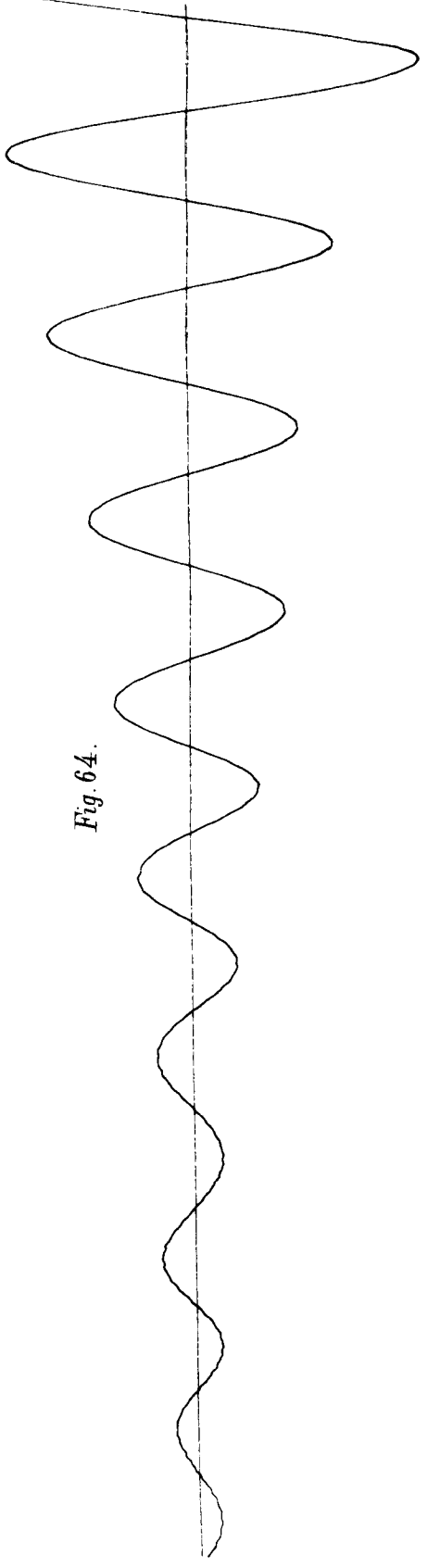


Fig. 64.

Schluss in Bezug auf das entsprechende Vergrößerungsverhältniss ziehen kann.

Auf den folgenden Figuren 63 und 64 sind zwei solcher Aufnahmen wiedergegeben.

Im ersten Fall war die Dämpfung des Pendels eine sehr geringe, im zweiten aber war dieselbe etwas verstärkt.

Wir sehen aus diesen Curven, dass die Pendelcurve sehr kleine Amplituden hat und kaum von der Nulllinie abweicht, während die Galvanometercurve einen sehr ausgeprägten Charakter trägt mit ganz beträchtlichen Amplituden der Ausschläge.

Bei der Fig. 64 sieht man noch, dass am Ende der Curve das Pendel ganz in Ruhe zu verbleiben scheint, aber die Galvanometercurve beweist am deutlichsten, dass die Pendelschwingungen immer noch fortbestehen, obgleich dieselben nicht mehr bemerkbar sind. Dass diese Schwingungen der Galvanometerspule wirklich den microscopischen Bewegungen des Pendels entsprechen und nicht etwa der Eigenbewegung der Galvanometerspule, geht unmittelbar aus der Thatsache hervor, dass das Galvanometer aperiodisch war und folglich an und für sich keine Schwingungen ausführen konnte.

Bei diesen Versuchen war das Verhältniss der Amplituden der Ausschläge der Galvanometer- und Pendelcurven etwa gleich 144.

Es lässt sich aber in dieser Hinsicht mit allergrösster Leichtigkeit eine viel grössere Empfindlichkeit erzielen.

Es wurden noch in der That in einem anderen Falle die Ausschläge des Pendels und des Galvanometers direct mit Hilfe von zwei Fernrohren und Scalen verfolgt. In dieser Weise kann man sofort das Verhältniss der Winkelausschläge beider Instrumente bekommen.

Es ergab sich im Mittel aus einer Reihe solcher Beobachtungen für das directe Verhältniss der an den Scalen gemessenen Ausschläge die Zahl 95. Nun war aber die Entfernung der Scala von dem Spiegel

$$\text{beim Pendel} \quad D = 3320 \text{ m/m},$$

$$\text{beim Galvanometer} \quad D_1 = 950 \text{ m/m}.$$

Daraus folgt für das Verhältniss  $\frac{\varphi}{\theta}$  der Ausschläge des Galvanometers und des Pendels

$$\frac{\varphi}{\theta} = 332.$$

Dies ist schon eine recht beträchtliche Vergrößerung, die bei einer Stromstärke von 1,6 Amp. im Electromagnet und bei einer bedeutenden Dicke der Spule erzielt wurde. Durch Vergrößerung der Stromstärke

und günstige Construction der Spule (möglichst dünn) kann ohne Schwierigkeit dieses Verhältniss noch weiter vermehrt werden, wenn man bedenkt, wie rasch die Feldstärke mit der Verminderung der Entfernung der Polschuhe von einander zunimmt.

Es ergab sich ausserdem, dass bei einer Entfernung des Galvanometer-  
spiegels von der Scala, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von der Regi-  
striertrommel von nur 1 Meter eine Drehung des Pendels um 1" schon  
3,2  $\frac{m}{m}$  auf der Trommel entspricht.

Eine solche Vergrösserung kann für practische Zwecke als ganz aus-  
reichend bezeichnet werden.

Bei einem Doppelpendel hat man mit der Differenz der Ausschläge  
zweier Pendel zu thun. Diese Differenz wird bei einer harmonischen Be-  
wegung der Unterlage durch die Gleichung (306) gegeben.

Nehmen wir wiederum den Grenzfall an, wo die Dämpfungsconstante  $\epsilon$   
des Pendels gleich der Constante  $n$  wird. Dann ergibt sich aus der ersten  
der Gleichungen (290) unter Berücksichtigung der Beziehungen (288)

$$\sqrt{R} = n_1^2 + n^2,$$

folglich wird

$$\theta = - \frac{1}{1 + \frac{n^2}{n_1^2}} \cdot \frac{s_1 - s_2}{l} \cdot \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma + \Delta). \dots (312)$$

Um  $\theta$  möglichst gross zu machen, muss  $n^2$  sehr klein sein, folglich  
lohnt es sich für Neigungsbeobachtungen Horizontalpendel zu benutzen.

Der Factor  $\frac{s_1 - s_2}{l}$  steht uns ebenfalls zur Verfügung. Folglich kann  
durch Vermehrung desselben ebenfalls die Empfindlichkeit der Registrierung  
erhöht werden.

#### § 14.

#### Theorie des Klinographen.

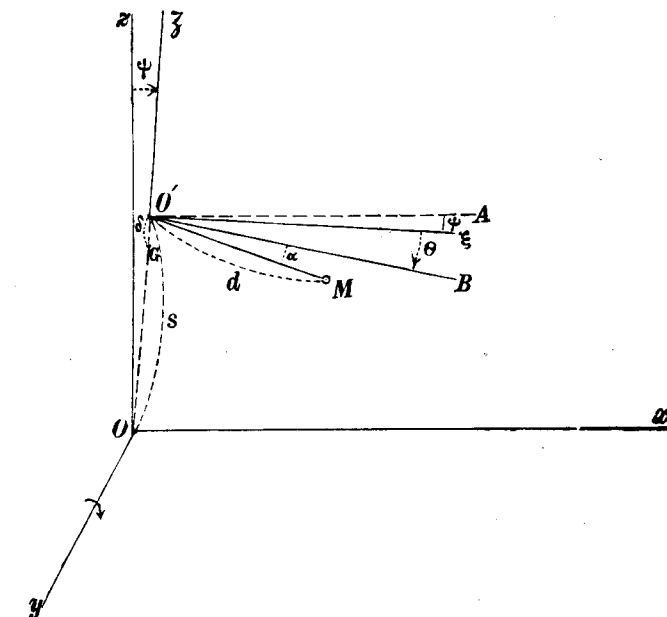
Der Klinograph wurde zum Zweck der Untersuchungen von Neigun-  
gen zuerst von Schlüter vorgeschlagen. Gegen dieses Instrument, in der  
Form, welche ihm Schlüter gegeben hat, habe ich gewisse Einwände

erhoben.<sup>1)</sup> Es lassen sich jedoch an demselben einige Abänderungen treffen,  
welche ihn in ein ganz brauchbares Instrument verwandeln können.

Bevor wir diese Abänderungen besprechen und die mit dem Klino-  
graphen ausgeführten Versuche beschreiben, wollen wir zuerst die Theorie  
der Bewegung desselben entwickeln.

Der Klinograph ist eigentlich nichts anderes, als eine einfache Waage,  
bei welcher die Hauptmassen sehr weit von der Drehungsaxe entfernt sind.  
Die Schwingungsperiode eines solchen Klinographen ist eine sehr grosse.  
Eine Abbildung desselben ist weiter auf der Figur 66 gegeben.

Fig. 65.



Denken wir uns nun ein im Raume festes rechtwinkliges Koordinaten-  
system  $xyz$  (siehe die Figur 65) und ein zweites System  $\xi\eta\zeta$ , dessen Centrum  
auf der Drehungsaxe des Klinographen in  $O'$  sich befindet. Bei der Gleich-  
gewichtslage sind die Axen beider Systeme resp. zu einander parallel. Die  
Erhöhung des Punktes  $O'$  über  $O$  sei  $s$ .

Es soll jetzt eine Drehung  $\psi$  der Unterlage um die Axe  $y$  stattfinden.

Bedeute nun  $\theta$  die relative Neigung des Klinographen in Bezug auf die  
Axe  $O'\xi$ .

<sup>1)</sup> Siehe meine Abhandlung «Ueber seismometrische Beobachtungen». Comptes rendus des  
séances de la Commission sismique permanente § 3. Livraison 1 (1902).

Nehmen wir weiter einen Massenpunkt  $M$  an, welcher in der Entfernung  $d$  von der Drehungsaxe sich befindet, wobei der Winkel zwischen  $O'M$  und  $O'B$  mit  $\alpha$  bezeichnet werde.

Die Unterlage soll ausser einer Drehung  $\psi$  um die  $y$  Axe noch eine Verschiebung  $x$  parallel der  $x$ -Axe erfahren haben.

Dann lassen sich die absoluten Coordinaten  $x_m y_m z_m$  des Punktes  $M$  folgendermaassen ausdrücken:

$$x_m = x + s\psi + d \cos(\alpha + \theta + \psi)$$

$$y_m = 0$$

$$z_m = s - d \sin(\alpha + \theta + \psi).$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit  $v$  des Punktes  $M$  wird

$$v^2 = [x' + s\psi' - d \sin(\alpha + \theta + \psi)(\theta' + \psi')]^2 + d^2 \cos^2(\alpha + \theta + \psi)(\theta' + \psi')^2,$$

oder

$$v^2 = [x' + s\psi']^2 + d^2(\theta' + \psi')^2 - 2d \sin(\alpha + \theta + \psi)(\theta' + \psi')[x' + s\psi'].$$

Die lebendige Kraft  $T$  des ganzen Systems wird

$$T = \frac{1}{2} \sum m [x' + s\psi']^2 + \frac{1}{2} \sum m d^2 (\theta' + \psi')^2 - \sum m d \sin \alpha \cos(\theta + \psi)(\theta' + \psi')[x' + s\psi'] - \sum m d \cos \alpha \sin(\theta + \psi)(\theta' + \psi')[x' + s\psi'].$$

Bedeute  $M$  die Masse des Systems,

$K = \sum m d^2$  das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehungsaxe und

$\delta$  die Entfernung des Schwerpunktes  $G$  des Systems von derselben.

Bei symmetrischer Vertheilung der Massen in Bezug auf die Drehungsaxe wird

$$\sum m d \cos \alpha = 0$$

und

$$\sum m d \sin \alpha = M\delta.$$

Es ergibt sich also bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$T = \frac{1}{2} M [x' + s\psi']^2 + \frac{1}{2} K (\theta' + \psi')^2 - M\delta (\theta' + \psi') [x' + s\psi'] \dots (313)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = K (\theta' + \psi') - M\delta [x' + s\psi']$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

und

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) = K (\theta'' + \psi'') - M\delta [x'' + s\psi''].$$

Das Drehungsmoment  $\left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$  des Systems findet man ohne Weiteres gleich  $-Mg\delta(\theta + \psi)$ , also

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = -Mg\delta(\theta + \psi).$$

Wenden wir nun das Lagrange'sche Princip

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$$

an, so erhalten wir sofort, wenn

$$n^2 = \frac{M\delta}{K} g \dots \dots \dots (314)$$

gesetzt und noch die Dämpfung eingeführt wird,

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta - \frac{n^2}{g}(x'' - g\psi) + \left(1 - \frac{n^2}{g} \cdot s\right)\psi'' = 0 \dots (315)$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung des Klinographen.

Ist die Erderschütterung vorübergegangen und die resultierende Neigung  $\psi$  geblieben, so müssen, wenn Alles in Ruhe ist, alle Derivierten gleich Null gesetzt werden und es bleibt einfach

$$\theta = -\psi.$$

Die Gleichung (315) lehrt uns weiter, dass der Klinograph vom Einflusse der Verschiebungen nicht frei ist, da in dieser Gleichung ein Glied mit  $x''$  auftritt. Dies ist auch selbstverständlich, da der Klinograph



eigentlich nichts anderes ist, als ein Verticalpendel mit sehr langer Periode, folglich muss er unbedingt von den Verschiebungen beeinflusst werden.

Folglich kann ein Klinograph nie im Stande sein, reine Neigungen allein zu registrieren und in dieser Hinsicht steht er meines Wissens, dem früher besprochenen Apparat nach.

Wäre  $n = 0$ , also die Periode des Klinographen unendlich gross, so würde dieser Nachtheil fortfallen, aber dann verliert der Apparat jede richtende Kraft, was practisch nicht zulässig ist. Mit einem Apparat ohne richtende Kraft könnte man keine Vertrauen verdienenden Beobachtungen anstellen.

Eine gewisse richtende Kraft muss also immer zugelassen werden, dann aber wird der Klinograph auch unter dem Einfluss der Verschiebungen stehen.

Es fragt sich aber, wäre es nicht möglich die richtende Kraft, wenn auch nicht auf Null zu reducieren, doch so klein zu wählen, dass der Einfluss der Verschiebungen vernachlässigt werden könnte. Wie weit dies zu erzielen ist, werden die weiter im nächsten § zu besprechenden Versuche zeigen. Was nun die Grösse der Dämpfungsconstante  $\epsilon$  anbelangt, so ist es wiederum zweckmässig  $\epsilon \geq n$  zu wählen, um den Einfluss der Eigenbewegung des Apparates möglichst zu eliminieren. Wir werden wie früher  $\epsilon = n$  setzen, was practisch sehr leicht zu erzielen ist.

Wollen wir also von jetzt ab annehmen, dass  $n$  und  $\epsilon$  sehr klein sind, und dementsprechend in erster Annäherung diejenigen Glieder, welche in der Gleichung (315)  $n^2$  und  $\epsilon$  als Factor enthalten, vernachlässigen.

Unsere Differentialgleichung nimmt dann folgende vereinfachte Form an

$$\theta'' + \psi'' = 0. \dots\dots\dots(316)$$

Ist für  $t = 0$   $\psi = 0$   $\theta = 0$  und  $\psi' = \psi'_0$ , so wird, wie leicht einzusehen ist,

$$\theta'_0 = -\psi'_0,$$

und es ergibt sich ohne Weiteres

$$\theta = -\psi. \dots\dots\dots(317)$$

Diese Gleichung ist allerdings sehr einfach, aber sie zeigt ebenfalls, dass  $\theta$  nie grösser als  $\psi$  sein kann.

In dieser Hinsicht steht ebenfalls der Klinograph dem Doppelpendel nach, da bei dem letzteren der Factor  $\frac{s_1 - s_2}{l}$ , mit welchem  $\psi_0$  multipliciert

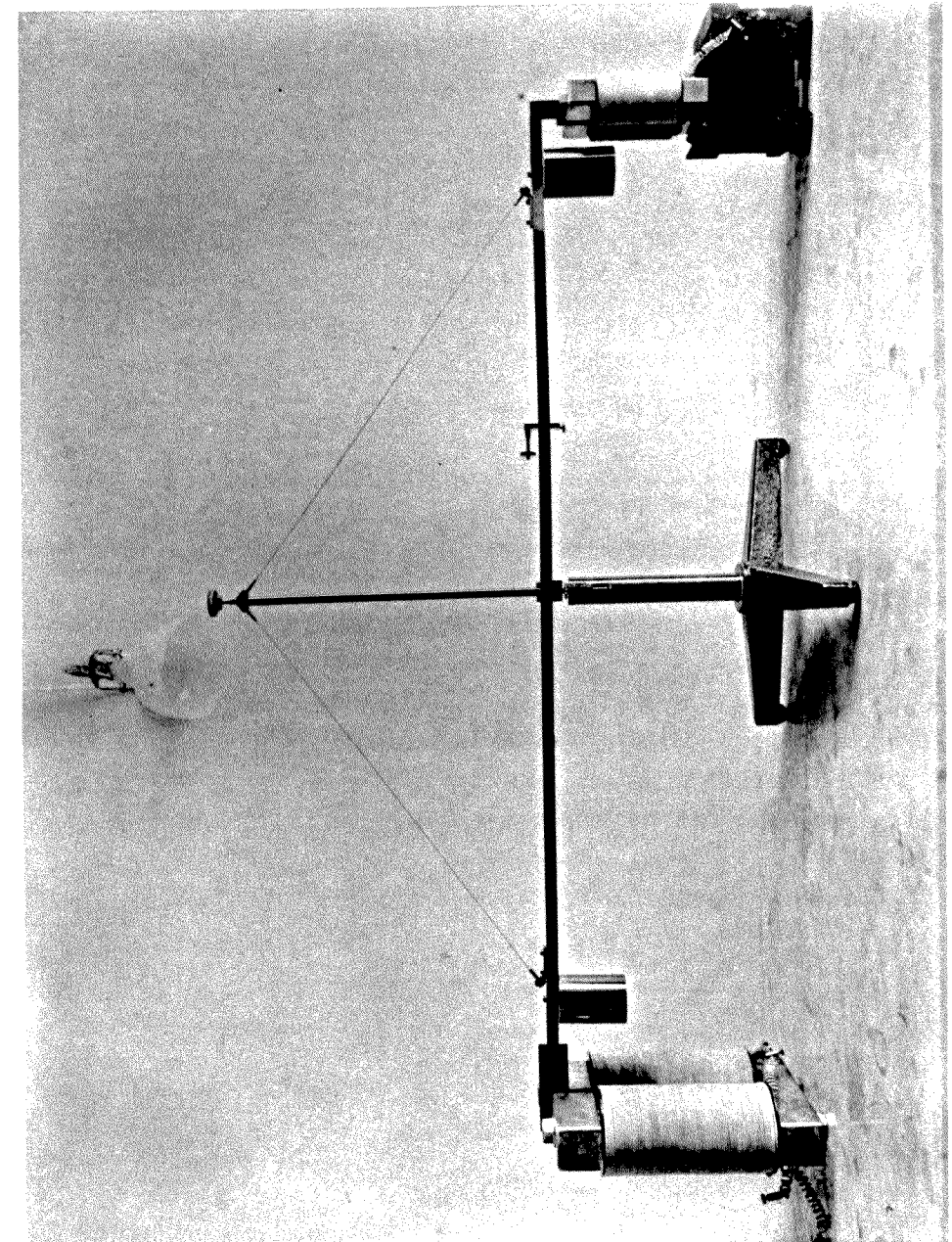


Fig. 66

wird (siehe die Formeln (306) und (312)), uns vollständig frei zur Verfügung steht.

Bedenkt man aber noch, dass die Neigungen bei Erdbeben äusserst klein sein müssen, da sogar ihre Existenz von Manchen bezweifelt wird, und dass bei einer Armlänge von 60 cm. des Klinographen eine Secunde in der Neigung nur eine äusserst kleine Verschiebung von  $0,003 \frac{m}{m}$  des Pendelarmendes hervorruft, so muss, wenn der Klinograph zur Erforschung der Neigungen verwendet werden soll, irgend welche Vergrösserungsvorrichtung getroffen werden.

Schlüter hat dazu eine kleine Hebelvorrichtung mit Spiegel verwendet. Gegen dieselbe habe ich Einwände erhoben, nicht nur, weil empfindliche Hebelvorrichtungen sehr leicht Ablesungsfehler nach sich ziehen, sondern auch weil, bei einer äusserst kleinen richtenden Kraft des Klinographen, jede solche mechanische Verbindung sehr störend einwirken kann.

Man kann aber eine derartige Vorrichtung ganz vermeiden. Dazu braucht man nur die früher so oft besprochene electromagnetische Registriervorrichtung in Anwendung zu bringen. Bei derselben bleibt der Klinograph nach wie vor vollständig frei und keine störenden Einwirkungen sind mehr zu befürchten<sup>1)</sup>.

Dementsprechend liess ich mir vom Mechaniker des Physikalischen Laboratoriums der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Herrn Masing einen Klinographen bauen, dessen Abbildung in der Figur 66 gegeben ist.

An dem einen Ende des Klinographenarmes, dessen Länge 50 cm. betrug, befand sich eine kleine Spule mit einer grossen Anzahl von Windungen und an dem des anderen eine Kupferplatte für die electromagnetische Dämpfung, um den Klinographen aperiodisch zu machen. Die beiden nöthigen Electromagnete sind auf der Figur sichtbar. Die beiden Drähte, welche nach oben gehen, dienen dazu, dem System eine gewisse Festigkeit zu geben. Mit Hilfe der oberen Schraube kann die Entfernung  $\delta$  des Schwerpunktes von der Drehungsaxe, also die Periode des Klinographen reguliert werden.

Das kleine verschiebbare Ansatzstück mit Schraube und Gewinde dient dazu, die Klinographenarme genau horizontal zu stellen.

Die Construction eines solchen Klinographen ist sehr einfach und billig.

Wendet man nun zum Registriierzwecke ein aperiodisches Galvanometer an, und bedeutet  $\varphi$  die Ablenkung der beweglichen Spule desselben,

---

<sup>1)</sup> Eine merkliche Rückwirkung des im Galvanometer äusserst schwachen inducierten Stromes auf den Klinographen ist wegen der grossen Masse desselben nicht zu befürchten.

so hat man wie früher, bei Beibehaltung ähnlicher Bezeichnungen (siehe die Gleichung (301),

$$\varphi'' + 2\varepsilon_0\varphi' + n_0^2\varphi + k\theta' = 0. \dots\dots\dots(318)$$

Haben die Beobachtungen  $\varphi$  in seiner Abhängigkeit von der Zeit  $t$  geliefert, so lässt sich im allgemeinen Fall  $\theta$  nach der Formel (303) berechnen, woraus  $\psi$  nach der Gleichung (317) sich unmittelbar ergibt.

Wollen wir zum Schluss noch den Specialfall besprechen, wo

$$\psi = \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma)$$

ist.

Nach der Gleichung (317) wird

$$\theta' = -n_1\psi_0 \cos(n_1 t + \gamma).$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (318) ein und integriert dieselbe unter der Voraussetzung, dass  $\varepsilon_0 \geq n_0$  ist, so ergibt sich bei Vernachlässigung von Gliedern, welche schon für sehr kleine Werthe von  $t$  verschwinden,

$$\varphi = k \frac{n_1}{\sqrt{R_1}} \cdot \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma - \Delta_1), \dots\dots\dots(319)$$

wo  $R_1$  und  $\Delta_1$  durch die Gleichungen (308) bestimmt sind.

Im Falle, wo  $n_0 = \varepsilon_0$  ist, wird<sup>1)</sup>

$$\varphi = k \frac{n_1}{n_1^2 + n_0^2} \psi_0 \sin(n_1 t + \gamma - \Delta_1). \quad ^2)$$

Durch Vergrößerung von  $k$ , also durch Vermehrung der Stromstärke im entsprechenden Electromagnet, kann die Empfindlichkeit der Registrierung in hohem Maasse gesteigert werden.

Diese verhältnissmässig einfachen Resultate haben wir dadurch erzielt, dass wir in der allgemeinen Gleichung des Klinographen diejenigen Glieder, welche mit  $\varepsilon$  oder  $n^2$  multipliciert sind, einfach vernachlässigt haben.

Wollen wir nun sehen, in wie fern diese Annahme berechtigt ist, und wie sich überhaupt der Klinograph zur Erforschung von Neigungen eignet.

<sup>1)</sup> Man vergleiche auch die Gleichung (311).

<sup>2)</sup>  $\operatorname{tg} \Delta_1 = \frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_0 n_1}.$

Fig. 67

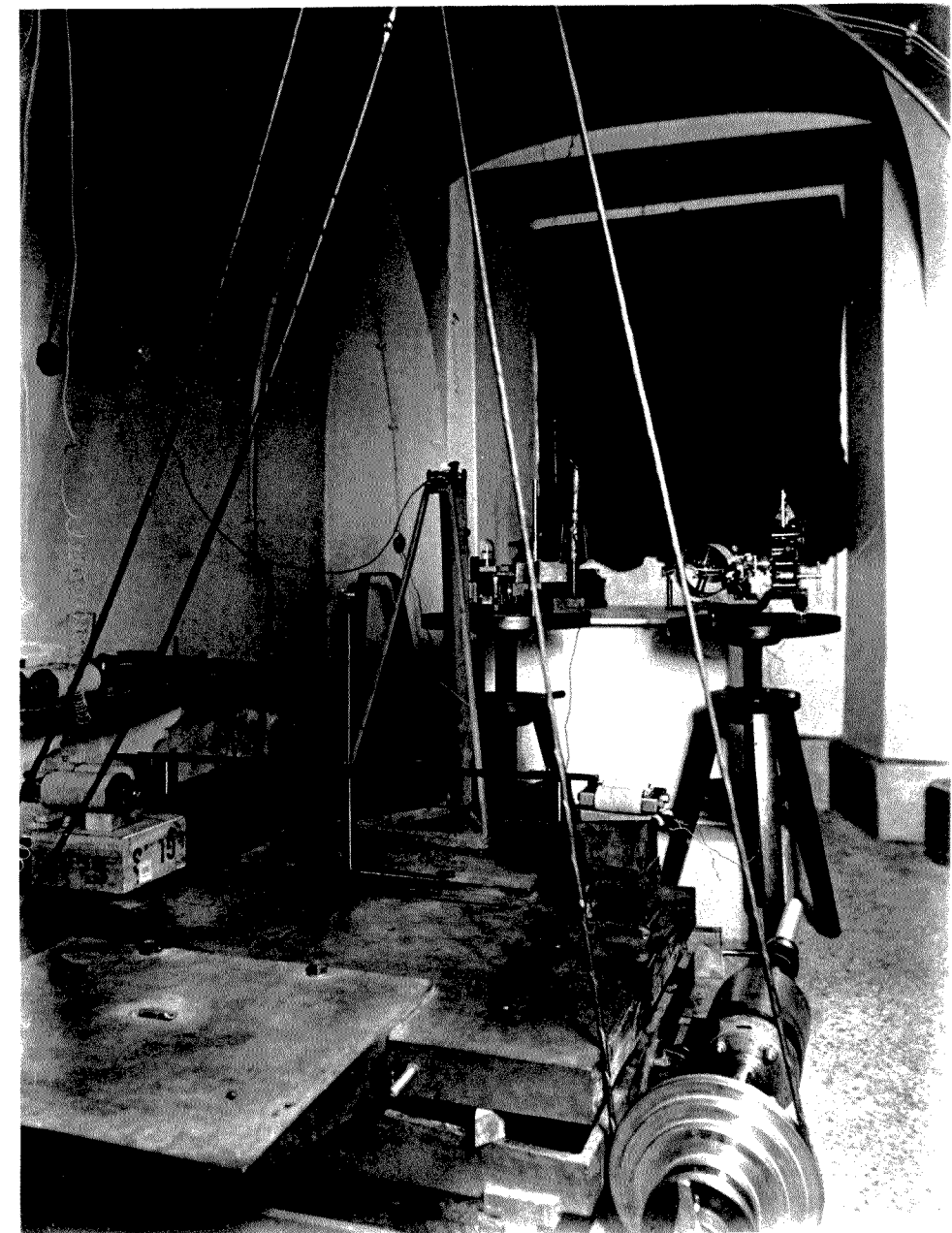


Fig. 68.

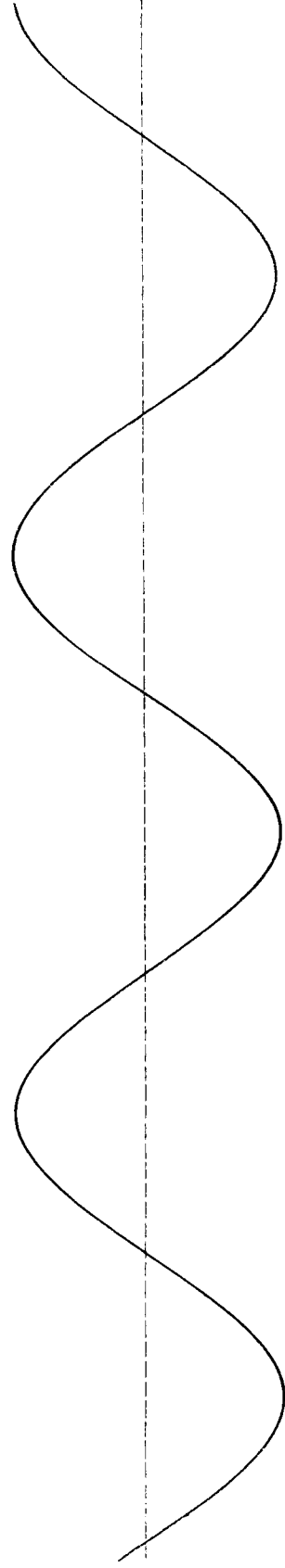


Fig. 69.



Fig. 70.

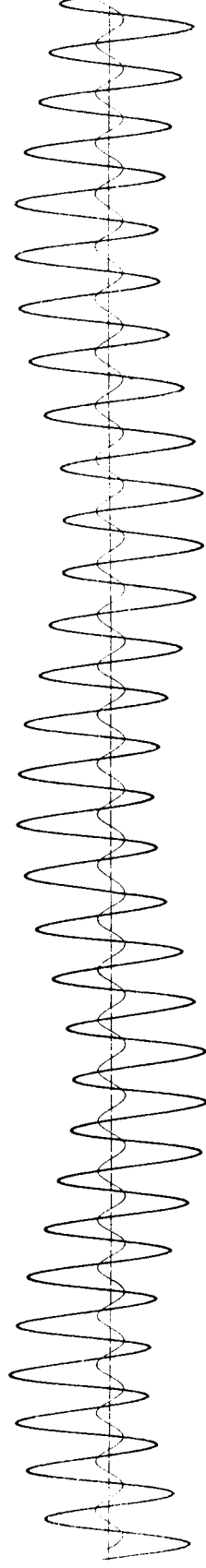
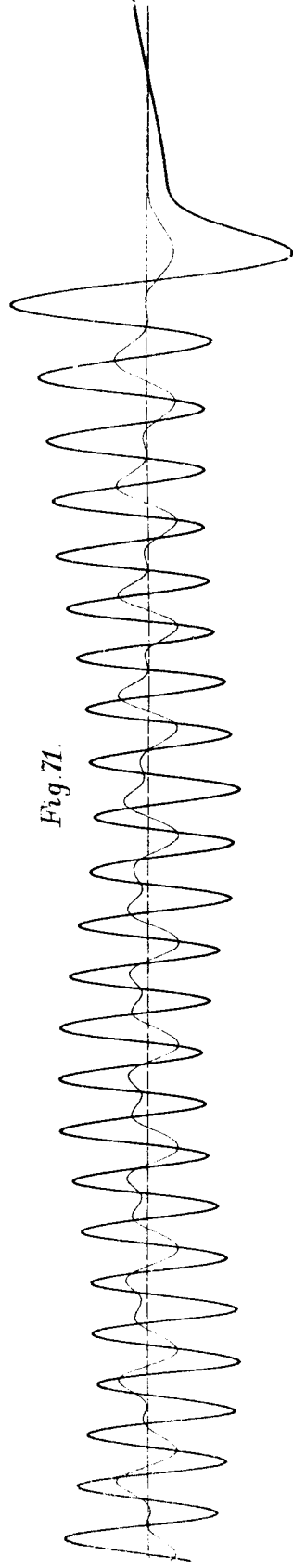


Fig. 71.



§ 15.

**Versuche mit dem Klinographen auf der Untersuchungsplattform.**

Der früher beschriebene Klinograph wurde nun auf der Untersuchungsplattform aufgestellt und seine Bewegungen unter verschiedenen Bedingungen studiert. Die Registrierung der Plattform- und Galvanometerbewegung geschah ganz in derselben Weise, wie bei den Versuchen mit dem Doppelpendel.

Die Fig. 67 gibt eine Abbildung des Klinographen auf der Untersuchungsplattform.

Zuerst wurden Versuche mit dem ungedämpften, also periodisch schwingenden Klinographen ausgeführt.

Die Eigenperiode des Klinographen ergab sich aus der entsprechenden Galvanometercurve bei ruhender Plattform (Fig. 68).<sup>1)</sup>

Es fand sich

$$T = 28,66,$$

folglich wird

$$n^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0,0481.$$

Dies ist eben der Factor, welcher in der Differentialgleichung des Klinographen als sehr klein angenommen war.

Die folgende Figur 69 entspricht dem Fall, wo die Plattform nur Verschiebungen ausgesetzt war.<sup>2)</sup>

Wir sehen auf derselben, dass der Klinograph seine langen periodischen Schwingungen ausführt, wobei der regelmässige Verlauf der Curve durch die Verschiebungen der Plattform etwas beeinträchtigt wird.

Wie störend die Eigenbewegung des Klinographen unter Umständen ausfallen kann, sieht man am deutlichsten auf den Figuren 70 und 71.

Die erste derselben entspricht dem Fall, wo die Plattform nur Neigungen und die zweite, wo dieselbe Verschiebungen und Neigungen zugleich ausgesetzt war (siehe die inneren Curven).

Obgleich der Klinograph ziemlich gut den Neigungen der Plattform folgt, sieht man doch eine lange Periode auftreten, welche der Eigenbewegung des Klinographen entspricht.

---

<sup>1)</sup> Bei diesen Versuchen war die Länge einer Secunde auf der Registriertrommel im Mittel gleich 6,0 m/m.

<sup>2)</sup> Die Entfernung  $s$  der Drehungsaxe des Klinographen von der Drehungsaxe der Plattform betrug bei diesen Beobachtungen 37,8 cm.

Diese secundäre Periode kann unter Umständen sehr störend wirken und die Verwerthung von Seismogrammen erschweren.

Wir sehen also, dass die Verwendung eines ungedämpften Klinographen sehr unzweckmässig ist. Es ist also unbedingt notwendig denselben mit Hilfe einer electromagnetischen Dämpfung in ein aperiodisches Instrument zu verwandeln, um den Einfluss seiner Eigenbewegung möglichst zu eliminieren.

Thut man das, so verhält sich der Apparat schon ganz anders und erweist sich als ein zur Erforschung der Neigungen ganz geeignetes Instrument.

Die weiter mitzutheilenden Curven beziehen sich nun auf den Fall, wo der Klinograph schon aperiodisch gemacht wurde ( $\epsilon = n$ ).

Die drei Curven auf der folgenden Fig. 72 entsprechen dem Fall, wo die Plattform nur periodische Verschiebungen erfährt.

Eine genaue Betrachtung der erhaltenen originellen Galvanometercurven lässt zwar erkennen, dass die periodischen Verschiebungen der Plattform entsprechende kleine Verschiebungen des Klinographen hervorrufen, aber die Abweichungen der Galvanometercurven von der Nulllinie sind allerdings so klein, dass man sie in den meisten Fällen ganz vernachlässigen darf.

Man ist also vollständig berechtigt in der allgemeinen Differentialgleichung des Klinographen, wenn derselbe aperiodisch ist, dasjenige Glied, welches von der Verschiebung der Unterlage abhängt, einfach gleich Null zu setzen.

Die folgenden drei Curven (Fig. 73, 74 und 75) entsprechen dem Fall, wo die Plattform nur Neigungen ausgesetzt ist (die inneren Curven). Wir sehen, dass das Galvanometer genau den Charakter der Plattformbewegung wiedergiebt.

Bedeutet nun  $T_1$  die Periode der Plattformbewegung und  $T_1'$  die entsprechende Periode für die Bewegung des Galvanometers, so erhält man aus diesen Curven die Perioden

	$T_1$	$T_1'$
(Fig. 73)	3,72	3,72
(Fig. 74)	2,51	2,51
(Fig. 75)	1,82	1,82.

Die Uebereinstimmung der Perioden kann als eine vollständige bezeichnet werden.

Bei den folgenden drei Curven (Fig. 76, 77 und 78) war die Plattform Verschiebungen und Neigungen zugleich ausgesetzt, wie dies aus der Form der inneren Curven zu erkennen ist.

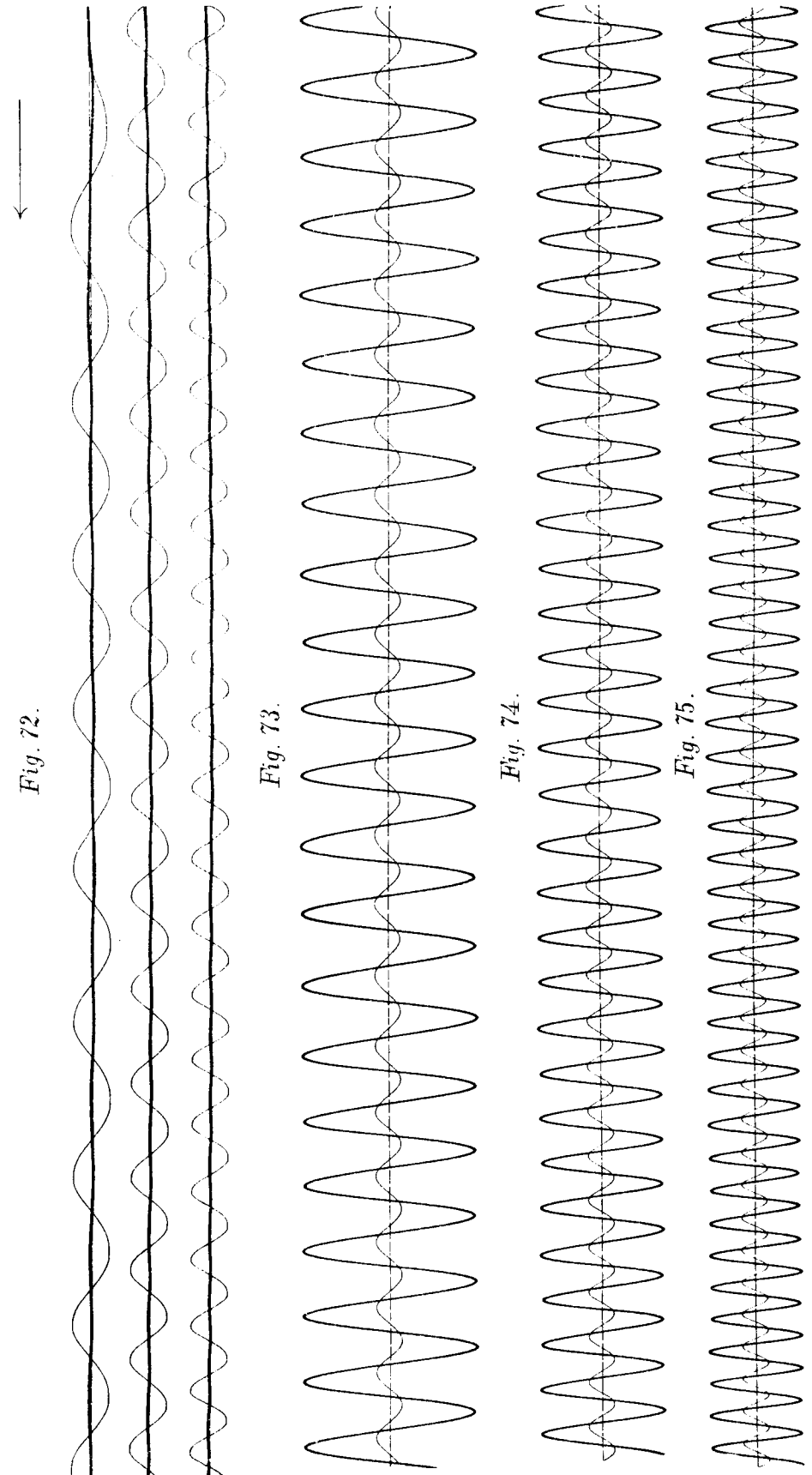


Fig. 76.

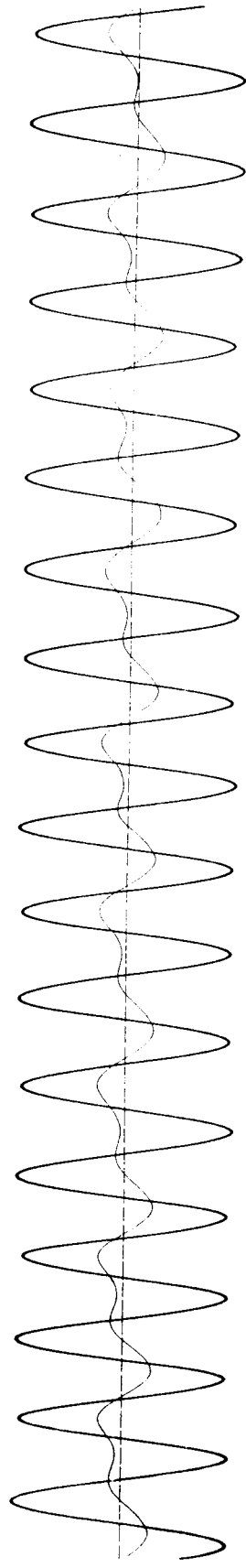


Fig. 77.

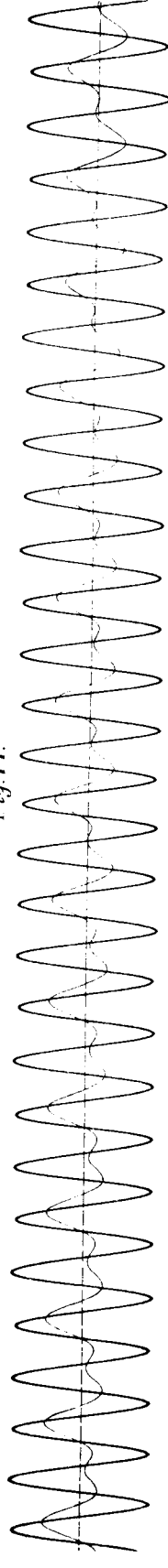


Fig. 78.

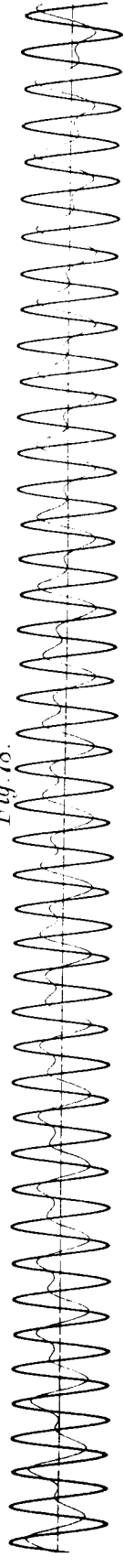
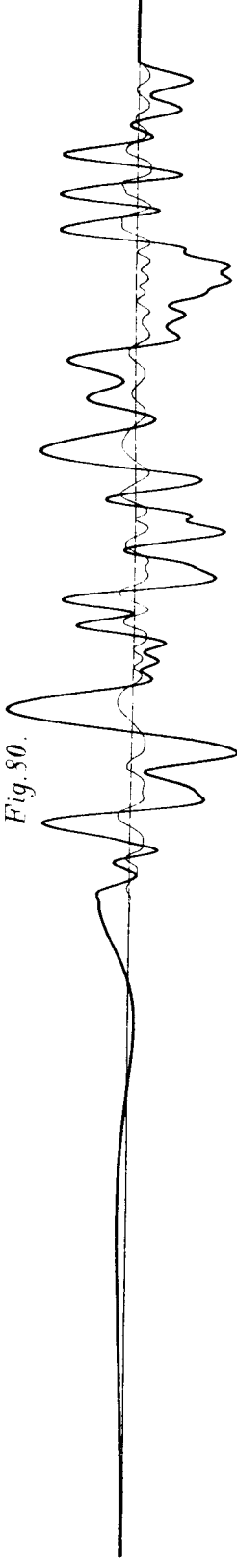


Fig. 79.



Fig. 80.



Wir sehen, dass auch in diesem Fall das Galvanometer nur eine einfache Sinuscurve beschreibt, deren Periode der Neigungsperiode der Plattform entspricht.

Die Verschiebungen üben auf den Klinographen keine merkliche Wirkung aus, und derselbe reagirt nur auf die Neigungen der Unterlage.

Die Periode der Neigungen  $T_1$  kann aus der Plattformcurve entnommen werden. Vergleicht man diese Werthe mit den Perioden  $T_1'$  des Galvanometers, so ergibt sich

	$T_1$	$T_1'$
(Fig. 76)	4,39	4,39
(Fig. 77)	2,68	2,67
(Fig. 78)	1,83	1,84.

Diese Werthe stimmen bis auf 0,01 mit einander überein.

Bis jetzt haben wir die Bewegung des Galvanometers untersucht unter der Voraussetzung, dass die Verschiebungen und Neigungen der Plattform regelmässigen periodischen Bewegungen entsprachen.

Wollen wir nun sehen, was vonstatten geht, wenn diese Bewegungen ganz unregelmässiger Natur sind.

Die folgende Fig. 79 entspricht dem Fall, wo der Plattform ganz willkürliche Verschiebungen ertheilt wurden. Wir sehen, dass die Galvanometercurve mit der Nulllinie zusammenfällt, folglich üben diese Verschiebungen keinen merklichen Einfluss auf den Klinographen aus.

Bei der folgenden, letzten Curve (Fig. 80) wurde die Plattform nur unregelmässigen Neigungen ausgesetzt. In diesem Fall erfährt das Galvanometer recht beträchtliche Ausschläge, wobei jeder Zackung der Plattformcurve eine Zackung der Galvanometercurve entspricht.

Diese Versuche führen also zu dem sehr befriedigenden Resultat, dass der Klinograph, wenn er passend, durch Einführung einer electromagnetischen Dämpfung und einer electromagnetischen Registrierung umgeändert wird, sich zur Erforschung von Neigungen als ein ganz verwendbares Instrument erweist.

Der Klinograph wäre, wegen seiner verhältnissmässigen Billigkeit und seiner leichten Handhabung, für Erdbebenstationen zweiter Classe zu empfehlen, für Haupterdbebenstationen wäre jedoch das früher beschriebene Doppelpendel vorzuziehen. Dasselbe ist, erstens, seiner Theorie nach, ganz streng unabhängig von irgend welchen Verschiebungen und zweitens lässt es eine grössere Empfindlichkeit der Registrierung zu. Ausserdem kann man dabei immer die Bewegung eines der beiden Pendel dazu



benutzen, um die Verschiebungen  $x$  der Erdoberfläche zu erforschen. Freilich treten diese Verschiebungen dabei immer in Verbindung mit den Neigungen  $\psi$  auf, da aber  $\psi$  als Function der Zeit aus den Aufzeichnungen des Doppelpendels sich ermitteln lässt, so ergibt sich die Möglichkeit auch  $x$  zu bestimmen.

Dementsprechend müssen zur Erforschung der vier Hauptcomponenten eines Erdbebens, nämlich zweier Verschiebungen und zweier Neigungen um zwei horizontale und senkrecht zu einander stehende Axen, auf einer Erdbebenstation, entweder zwei senkrecht zu einander stehende Pendel und zwei Klinographen, oder zwei Doppelpendel aufgestellt werden.

